MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2
7. LA PROBABILITA'

Dice foto di Matsuyuki
http://www.flickr.com/photos/matsuyuki/201651074/

Indice

►1. Gli eventi

L’esito del lancio di una moneta o di un dado, l’esito di un'estrazione del lotto, il sesso di un nascituro, la durata di una lampadina o di un computer sono esempi di fenomeni la cui realizzazione non può essere prevista con certezza; per questo vengono detti eventi casuali o aleatori (dal latino alea, dado). Spesso è necessario prendere decisioni in condizioni di incertezza: in quale università proseguire gli studi, decidere se fare il vaccino contro l'influenza, scommettere sulla vincita di una squadra, sull'uscita di una sequenza di numeri al gioco del Lotto. E’ quindi fondamentale nei confronti di un fenomeno dall’esito incerto, poter identificare quali sono gli eventi che si possono verificare ed inoltre riuscire ad esprimere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di tali eventi.
Quali sono gli eventi possibili per un dato fenomeno aleatorio? Supponiamo di lanciare un dado e di essere interessati alla faccia che si presenta dopo aver effettuato il lancio. Il lancio del dado rappresenta il **fenomeno** oggetto del nostro studio, l’uscita del numero 4 o l’uscita di un numero dispari sono detti **eventi aleatori o casuali**, in quanto sappiamo che si presenterà una delle facce, ma non sappiamo quale.

DEFINIZIONE: Si chiama **evento casuale** o **aleatorio** un risultato o un fatto qualunque di cui si possa dire se l'evento si è verificato o meno.

Se si considera la proposizione “Oggi farà bel tempo” è evidente che non è chiaro cosa si intende per bel tempo (senza pioggia? senza nuvole? con il sole?) né il luogo a cui ci si riferisce. Sarebbe meglio affermare per esempio “Stamani a Milano ci sarà il sole”. È necessario quindi specificare con precisione l'evento che si considera in modo da essere sicuri se l'evento si è verificato o meno.
Nel lancio di un dado sono possibili sei risultati, espressi dai numeri da 1 a 6 e solo uno di essi si realizzerà. Chiamiamo questi sei risultati **eventi elementari** e indichiamo il loro insieme con Ω.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

DEFINIZIONE. Si chiama **spazio degli eventi**, l’insieme di tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato. Tale insieme viene indicato con Ω .

L'insieme Ω non esaurisce la totalità degli eventi collegati al lancio del dado; non comprende per esempio l'evento P = {Numero pari} o l'evento M = {Numero minore di 3}. Tuttavia Ω permette di rappresentare qualsiasi evento come particolare sottoinsieme di Ω.

DEFINIZIONE. Si chiama **evento elementare** ogni elemento dell’insieme Ω, mentre **evento composto** un sottoinsieme qualsiasi di Ω.

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte e consideriamo i seguenti eventi: uscita di un asso di cuori, uscita di un re. Qual è la differenza fra questi due eventi? Il primo dei due è un *evento elementare*, mentre l’altro è un evento formato da quattro eventi elementari (tutti i possibili re presenti nel mazzo) e viene detto *evento composto*.
Sono esempi di eventi composti l’uscita di un numero dispari nel lancio di un dado o l’estrazione di due palline rosse da un’urna contenente 3 palline rosse e 7 nere.
Consideriamo ora due eventi che rivestono una particolare importanza: l’uscita del 7 nel lancio di un dado e l’uscita di un numero minore di 7 sempre nel lancio di un dado. È evidente che l'uscita del 7 non si verificherà mai, mentre l'uscita di un numero minore di 7 è sempre verificato.

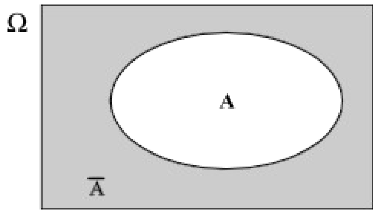
DEFINIZIONI

Chiamiamo **evento impossibile**, e lo indicheremo Ø, un evento che non può verificarsi in alcun caso.

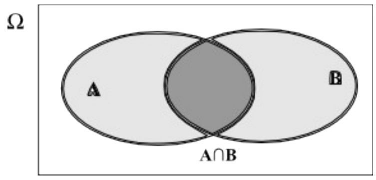
Chiamiamo **evento certo** l'insieme Ω costituito da tutti gli eventi elementari e quindi da tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato.

Gli eventi elementari di un insieme A e gli eventi composti che si possono ottenere con gli eventi elementari di A formano lo spazio degli eventi che viene indicato con $\wp(A)$ o insieme delle parti di A
Gli eventi sono gli oggetti dello studio della probabilità e si indicano con le lettere maiuscole A, B, … mentre per le operazioni e le relazioni tra eventi si usano i corrispondenti simboli che si sono utilizzati per le operazioni e le relazioni tra insiemi. Molto utile è anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn.

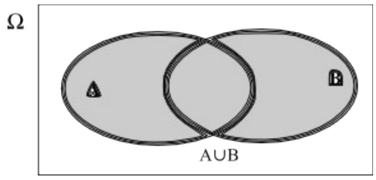
1. La **negazione** di un evento A indicata con $\overline{A}$ indica che $\overline{A}$ non si verifica quando A si verifica e viceversa.



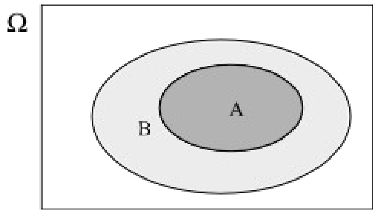
2. L'**intersezione** tra gli eventi A e B sarà indicata con $C = A \cap B$ e sarà verificata se gli eventi A e B si verificheranno insieme.



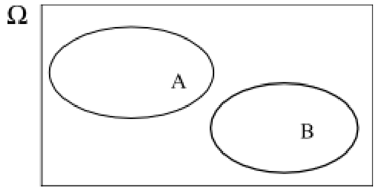
3. L'**unione** tra gli eventi A e B si indicherà con $C = A \cup B$ e sarà verificata se almeno uno dei due eventi sarà verificato.



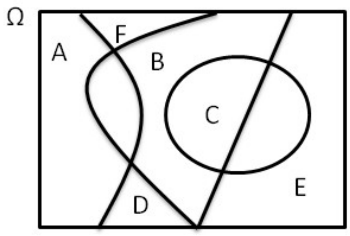
4. L'evento A **implica** l'evento B si indicherà con $A \subseteq B$, significa che ogni volta che si verifica A si verifica anche B.



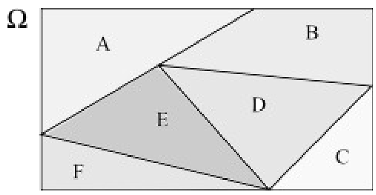
5. Due eventi A e B si dicono **incompatibili**, se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.



6. Due o più eventi si dicono **esaustivi** se è necessario che almeno uno di essi si verifichi. Nell'esempio l'insieme Ω è completamente coperto dall'unione di A, B, C, D, E, F.



7. Un insieme di eventi che goda delle proprietà 5 e 6, con eventi che sono incompatibili ed esaustivi, genera una partizione nello spazio degli eventi possibili. L'unione è identificabile con l'evento certo Ω . Gli eventi che costituiscono la partizione di Ω sono detti **eventi elementari** o **costituenti**.



DEFINIZIONE. Se n eventi A, B, …, F, sono esaustivi (A∪ B∪ … F = Ω) e a due a due incompatibili (A∩B = A∩C … = B∩C … =C∩D … = D∩E … =E∩F = Ø) diremo che essi formano una **partizione dello spazio degli eventi**. Tutti gli eventi, identificabili da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, sono dati dall'**insieme delle parti** di Ω indicato con $\wp(\Omega)$.

Ricordiamo che la cardinalità dell'insieme delle parti cioè il numero degli eventi che si possono formare con gli elementi di Ω è dato da $card(\wp(\Omega)) = 2^n$, dove n rappresenta il numero degli eventi elementari. Così nel lancio del dado abbiamo $2^6 = 64$ possibili eventi. Naturalmente sono considerati anche l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento impossibile e l'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ che rappresenta l'evento certo.

1 Quali dei seguenti eventi sono certi, probabili, impossibili

a) Il giorno di Pasquetta pioverà C P I
b) Il giorno di Pasqua sarà domenica C P I
b) Comprando un biglietto della lotteria vincerò il primo premio; C P I
c) Quest'anno sarò promosso; C P I
d) Il 30 febbraio sarà domenica. C P I

2 Aprendo a caso un libro di 200 pagine indica se gli eventi seguenti sono impossibili, certi o casuali e in questo ultimo caso indica se sono elementari.

Si prenda la pagina 156 …..........................
Si prenda la pagina 210 …..........................
Si prenda una pagina minore o uguale a 200 …..........................
Si prenda una pagina multipla di 10 …..........................

3 Completa la tabella

Lanciando una moneta ottengo croce		
Insiemi che identificano l'evento	Spazio degli eventi	Numero degli eventi
$E=\{croce\}$	$\Omega=\{testa, croce\}$	$2^2=4$
Lanciando un dato ottengo 1 o 6		
$E=\{1,6\}$	$\Omega=\{1,2,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots\}$	$2^6=\ldots$
Estraendo una pallina da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero primo		
$E=\{2,3,5,\ldots,\ldots,\ldots\}$	$\Omega=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 15\}$	2^{15}
Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta il 7 di denari		
$E=\{7\ denari\}$	$\Omega=\{x\in A \mid A=\{Mazzo\ da\ 40\ carte\}\}$	… ...

Lanciando due monete ottengo facce diverse		
Insiemi che identificano l'evento	Spazio degli eventi	Numero degli eventi
…………..…	…………..…	………
Lanciando un dato ottengo un numero pari		
…………..…	…………..…	………
Estraendo una pallina da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero multiplo di 3		
…………..…	…………..…	………
Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta un asso		
…………..…	…………..…	………

4 Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane, individua fra le seguenti le coppie di eventi incompatibili:

a) La carta estratta è un re.
b) La carta estratta è di spade.
c) La carta estratta è un 5.
d) La carta estratta è una figura.
e) La carta estratta è di denari.
f) La carta estratta è un multiplo di 3.
g) La carta estratta non è una figura.

Quali sono i 2 eventi la cui unione genera un evento certo?

5 Considerando la distribuzione dei sessi in famiglie con due figli in cui lo spazio degli eventi $\Omega=\{MM, MF, FM, FF\}$ quali sono l'intersezione e l'unione degli eventi E_1 ="Il primo figlio è maschio" e E_2 = "Il secondo figlio è maschio".

►2. Definizioni di probabilità

Nel linguaggio comune l'uso del termine probabilità è abbastanza chiaro e uniforme. Si dice che un certo "fatto" o "evento" è più o meno probabile a seconda che ci si aspetti che si verifichi più o meno facilmente. La probabilità è dunque una misura delle aspettative nel verificarsi di un evento. Il valore della probabilità è la misura (un numero) che esprime l'opinione del soggetto (decisore) in merito al verificarsi di un ben determinato evento A, ovvero esprime il suo grado di fiducia nel verificarsi dell'evento che dipende dalle informazioni che si hanno a disposizione al momento di effettuare la valutazione.

Se diciamo che oggi pioverà con probabilità $0{,}20=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ intendiamo che siamo disposti a scommettere 20 centesimi per avere 1 euro nel caso che piova e perdere i 20 centesimi della posta nel caso che non piova.

DEFINIZIONE. La probabilità dell'evento A è quel valore P(A) che si ottiene dalla quota q che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita S nel caso si verifichi l'evento. Quindi $P(A)=\frac{q}{S}$.

Per ottenere una valutazione coerente, per valutare quanto siamo disposti a perdere/vincere nella scommessa, dobbiamo immedesimarci nei due ruoli, quello dello scommettitore e quello del banco. Inoltre le somme che scommettiamo devono essere significative per chi procede alla valutazione.
Nessun individuo coerente scommetterebbe su un evento impossibile una quota maggiore di 0 qualunque sia la vincita e nessun individuo pagherebbe una vincita per il verificarsi di un evento certo.
Da queste considerazioni deduciamo che la misura della probabilità appartiene all'intervallo [0,1], essendo 0 il valore che corrisponde all'evento impossibile e 1 quello che corrisponde all'evento certo.

Regole per la probabilità

Prima di entrare nella valutazione della probabilità sintetizziamo le regole che abbiamo appena introdotto.
La probabilità è un numero reale non negativo p associato ad ogni evento E, $p=P(E)$, tale che:
1. se l'evento E è certo $P(E)=1$, se l'evento E è impossibile $P(E)=0$;
2. se gli eventi A e B sono incompatibili $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;
3. se l'evento E è un evento aleatorio e $\overline{E}$ l'evento complementare, dato che i due eventi E e $\overline{E}$ sono incompatibili ed esaustivi, dalle due regole precedenti deriva: $P(E)+P(\overline{E})=1$ e $P(\overline{E})=1-P(E)$.
Abbiamo dato le regole della probabilità, ma come si procede alla sua valutazione?

Definizione classica

La valutazione della probabilità a volte si riconduce a semplici giudizi di equiprobabilità: cioè ogni evento elementare dello spazio degli eventi ha la stessa probabilità. Così nel lancio di un dado, nel gioco della tombola, nel gioco delle carte tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità. Quindi se n sono gli eventi elementari la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$.
La probabilità di un evento E è data dal rapporto tra il numero f dei casi favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti i casi possibili, purché ugualmente possibili. In simboli:

$$P(E)=\frac{f}{n}$$

Mentre nei giochi di sorte si realizzano le condizioni per calcolare tale probabilità (conoscenza a priori dei casi possibili, di quelli favorevoli e condizione di equiprobabilità) esistono altri eventi casuali per i quali è difficile o impossibile calcolare tale probabilità.

Esempi

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando un dado regolare esca*
  A. un numero dispari, B. il numero 1, C. il numero 6, D. un multiplo di 3.

Dato che l'uscita di ogni faccia del dado si presuppone abbia la stessa probabilità possiamo applicare lo schema classico.
Lo spazio degli eventi elementari contiene 6 elementi $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, cioè $n=6$ sono i casi possibili; l'evento A "esca un numero dispari" è $A=\{1,3,5\}$ che contiene 3 elementi, $f=3$, i casi favorevoli sono 3. Dunque si ha: $P(A)=\frac{f}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%$.

$P(B)=\frac{1}{6}$ c'è un solo caso favorevole (il numero 1) e 6 casi possibili (le 6 facce del dado).

$P(C)=\frac{1}{6}$ come per il caso precedente c'è un solo caso favorevole su 6 possibili.

$P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ i casi favorevoli sono 2 (i multipli di 3 sono il 3 e il 6), i casi possibili sempre 6.

- *Se in un sacchetto ho 3 palline rosse e 2 palline gialle qual è la probabilità che estraendo a caso una pallina questa sia rossa?*

La probabilità che si estragga una pallina rossa è $p=\frac{3}{5}=0{,}6=60\%$, infatti i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrarre una pallina rossa" sono 3, tante quante sono le palline rosse, i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 5, tante quante palline ci sono nel sacchetto.

- *Da un mazzo di 40 carte napoletane estraiamo una carta. Calcoliamo la probabilità degli eventi:*
  A) esce una carta di spade;
  B) esce una carta con il numero 12;
  C) esce una carta con un numero o una figura;
  D) esce il sette di denari;
  E) esce un asso.

I casi possibili sono 40, dato che il mazzo è formato da 40 carte. Anche qui siamo in presenza di eventi elementari equiprobabili, applichiamo ancora lo schema di valutazione classico
L'evento A è casuale, infatti i casi favorevoli sono 10, dato che il mazzo ha 10 carte di spade:

$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}; \quad P(B)=0 \ \ e \ \ P(C)=1$

L'evento B è impossibile dato che non esiste una carta col numero 12.
L'evento C è certo, infatti i casi favorevoli sono 40, dato che il mazzo ha 12 figure e 28 carte con un numero.

$P(D)=\frac{1}{40}$ c'è un solo sette di denari su 40 carte.

$P(E)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1=10\%$ nel mazzo di 40 carte ci sono 4 assi.

- *Lanciando in aria 3 monete, quale dei seguenti eventi è più probabile?*

a) Ottenere su 3 monete testa.
b) Ottenere su 1 moneta testa e su 2 monete croce.

Per rispondere alla domanda occorre calcolare le probabilità dei due eventi. Applichiamo la definizione classica. Dobbiamo calcolare tutti gli eventi possibili e tutti gli eventi favorevoli.
Aiutiamoci con una tabella per elencare tutti i casi.

prima moneta	seconda moneta	terza moneta
T	T	T
C	T	T
T	C	T
T	T	C
C	C	T
C	T	C
T	C	C
C	C	C

I casi possibili sono 8.
I casi favorevoli all'evento "3 volte testa" sono 1. La probabilità di questo evento è quindi

$p=\frac{1}{8}=0{,}125=12{,}5$.

I casi favorevoli all'evento "1 moneta testa e 2 monete croce" sono CCT, CTC, TCC, quindi 3, allora

$p=\frac{3}{8}=0{,}375=37{,}5$.

Possiamo concludere che l'evento più probabile è ottenere 1 testa e 2 croci.

- Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi la somma dei numeri ottenuti sia
  A. Il numero 1,
  B. il numero 12,
  C. il numero 6.

Valutiamo prima di tutto il numero dei casi possibili. Elenchiamo tutti gli esiti che si possono avere lanciando due dadi:

1 1   1 2   1 3   1 4   1 5   1 6

2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	…	…	…	3 6
4 1	…	…	…	…	4 6
5 1	…	…	…	…	5 6
6 1	…	…	…	…	6 6

I casi possibili sono quindi 6x6 = 36.

A. Non è possibile ottenere il numero 1 lanciando due dadi, il numero minimo ottenibile è 2, perciò $p(A)=\frac{0}{36}=0$, l'evento è impossibile.

B. Il numero 12 si può ottenere in un solo caso quando esce su entrambi i dadi il 6, quindi $p(B)=\frac{1}{36}\approx 2{,}8\%$

C. Il numero 6 si può ottenere nei seguenti modi: 1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1, perciò $p(C)=\frac{5}{36}\approx 13{,}9\%$

Definizione frequentista

Se si considera una successione di eventi dello stesso tipo e che avvengono in condizioni simili come l'uscita di una determinata faccia in un dado truccato, si indica come frequenza relativa $F(E)$ il rapporto tra il numero v dei casi in cui si è verificato l'evento e il numero totale delle prove n , cioè $F(E)=\frac{v}{n}$.

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi intorno a un valore ben preciso al crescere del numero delle prove effettuate.

Si assume come probabilità dell'evento E il valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa dello stesso evento, all'aumentare del numero delle prove ripetute alle stesse condizioni:

$$P(E)\approx F(E)=\frac{v}{n}$$

L'errore che si commette diventa sempre più piccolo al crescere di n. La valutazione della probabilità così definita si chiama valutazione statistica, *a posteriori* o frequentista.

Anche l'ambito di applicazione di tale valutazione è limitato in quanto l'ipotesi che sta alla base della definizione è che l'evento a cui si vuole assegnare la probabilità sia pensabile come uno dei possibili risultati di una determinata prova e che tale prova sia ripetibile infinite volte nelle stesse condizioni.

Si fa molto uso di questo schema di valutazione per stime della probabilità in campo economico e sanitario.

- *In un'azienda alimentare si producono vasetti di marmellata. In uno studio di controllo sono stati evidenziati su 2500 vasetti analizzati 13 con imperfezioni e non idonei al commercio. Si valuti la probabilità dell'evento E="confezioni non idonee al commercio".*

Se si considera il campione dei vasetti analizzati significativo rispetto alla produzione complessiva delle confezioni prodotte possiamo considerare la frequenza relativa dell'evento E come misura della probabilità.

Quindi $P(E)=F(E)=\frac{13}{2500}=0{,}0052$.

- *Qual è la probabilità che un certo guidatore faccia un incidente con la macchina? Quanto deve pagare, come premio, a una compagnia di assicurazioni in modo che, se fa un incidente, la compagnia paghi per intero il danno?*

Per rispondere a queste domande le compagnie di assicurazioni sono in grado di stimare, sulla base dei numerosissimi incidenti stradali che si verificano ogni anno, qual è la probabilità che un guidatore provochi un incidente d'auto.

- *Un sacchetto contiene 10 palline, alcune bianche, altre nere. Si estrae a caso, senza guardare nel sacchetto un pallina, si guarda il colore e si rimette il sacchetto nella pallina. Dopo 100 estrazioni abbiamo contato 78 volte la pallina bianca e 22 la pallina nera. Possiamo allora ipotizzare che nel sacchetto ci siano 8 palline bianche e 2 palline nere.*

Definizione soggettiva

E' la definizione di probabilità che abbiamo dato all'inizio di questo paragrafo: la probabilità dell'evento A è quel valore p che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita unitaria.

Se un individuo valuta pari $\frac{1}{4}=25\%$ la probabilità di un certo evento E vuol dire che è disposto a pagare 25 euro a un ipotetico banco per riceverne 100 nel caso che E si verifichi. Naturalmente la scommessa va accettata anche come banco che deve essere disposto a scommettere il $75\% = 1-p$ sul fatto che E non si verifichi: $P(E)=\frac{q}{S}$; *dove* $q=25$ *e* $S=100$.

Le scommesse

La definizione soggettiva si applica anche alle scommesse. Supponiamo di scommettere sul verificarsi di un evento E a cui attribuiamo probabilità p . Stabiliamo inoltre di giocare e quindi perdere q euro nel caso l'evento non si verifichi e di guadagnare g euro nel caso l'evento si verifichi. In genere le scommesse si indicano in questo modo: si mette in rapporto la perdita con il guadagno $\frac{q}{g}$ o anche $q:g$ che si legge q *a* g . In questo caso q e g si chiamano le **poste** o le **messe** del gioco.
Che relazione c'è tra questo rapporto e la probabilità?
Se in un grande numero di scommesse così congegnate vincessimo la somma g una frazione p di volte e perdessimo la somma q una frazione $1-p$, affinché il gioco risulti equo dovremmo avere $p\cdot g - q\cdot(1-p) = 0$. Isoliamo p nell'uguaglianza.

$$p\cdot g - q\cdot(1-p) = 0 \rightarrow p\cdot g-q+q\cdot p = 0 \rightarrow p\cdot(g+q) = q \rightarrow p = \frac{q}{g+q}$$

La relazione è dunque questa: la probabilità di una scommessa $q:g$ è data dalla perdita q al numeratore e al denominatore la somma complessiva che si incassa data dal guadagno più quello che si è scommesso.

- *Supponiamo che la vincita ai mondiali di calcio dell'Italia sia data* $5\,a\,12$ *o* $5:12$ *o* $\frac{5}{12}$ *dai bookmaker inglesi. Quale probabilità assegnano gli allibratori alla vincita dell'Italia?*

$$P(E) = \frac{5}{5+12} = \frac{5}{17} = 0{,}294$$

- *Leggo sul sito del Corriere della Sera, che per la partita Real Madrid-Barcellona, che si giocherà questa sera, la vittoria del Real Madrid viene data 1 a 2,60.*

Significa che scommettendo 1 euro possiamo vincerne 2,60: la vittoria del Real Madrid è stata quindi stimata dal giornale $p=\frac{1}{2{,}60}=\frac{100}{260}=0{,}38...$ circa 38%.

6 Quali tra i seguenti numeri possono essere misure di probabilità?

1,5	0,5	25%	100%	-0,1
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	0	120%	$0,\overline{3}$

7 Elenca i casi favorevoli all'evento: "lanciando tre dadi la somma delle facce è 5".

8 Per uno studente è indifferente ricevere 350 € senza condizioni, oppure un motorino del valore 1500 € solo se sarà promosso. Qual è la probabilità che lo studente attribuisce alla sua promozione? $P(E)=0{,}23$

9 Uno studente è disposto a puntare 10 € per riceverne 60 solo se sarà interrogato in matematica. Quale probabilità lo studente attribuisce all'eventualità di essere interrogato in matematica? $P(E)=0{,}17$

10 Tre amici si sfidano ad una gara di scacchi. Giudico che due di essi si equivalgano, mentre ritengo che il terzo abbia probabilità doppia di ciascuno degli altri due sfidanti. Quale probabilità attribuisco a ciascuno dei tre giocatori? $P(A)=P(B)=0{,}25\,,\ P(C)=0{,}50$

11 Un'urna contiene 3 palline bianche, 5 rosse e 7 verdi tutte uguali e distinguibili solo per il colore. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna si verificano i seguenti eventi.

A) Si estrae una pallina rossa.
B) Si estrae una pallina bianca.
C) Si estrae una pallina bianca o verde. [P(A)=1/3; P(B)=1/5; P(C)=2/3]

12 Si lanciano 3 monete equilibrate (testa e croce sono egualmente possibili); calcolare la probabilità di ottenere 2 croci e 1 testa.

13 Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi regolari la somma dei numeri che si presentano sia 6.

R. $P(E)=\frac{5}{36}$

14 Un'urna contiene 100 palline identiche, numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia un multiplo di 10. R. $P(E)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

15 Un'urna contiene 15 palline identiche, numerate da 1 a 15. Calcolare la probabilità che estraendo a caso due palline dall'urna, la loro somma sia 10. R. $P(E)=\frac{8}{210}=\frac{4}{105}$

16 Calcola la probabilità che lanciando 4 volte una moneta equilibrata escano solo 2 teste.

R. $P(E)=\frac{3}{8}$

17 Pago alla mia compagnia di assicurazione un premio di 450 € l'anno per avere assicurato contro il furto la mia auto che ho pagato 12000 €. Quale probabilità viene attribuita dalla compagnia al furto dell'auto?
R. $P(E)=0{,}0375$

18 E' più facile vincere un premio acquistando un biglietto nella lotteria A che prevede 10 premi di ugual valore su un totale di 5000 biglietti venduti o nella lotteria B che prevede 7 premi su 3000 biglietti venduti? Se ogni premio per entrambe le lotteria ammonta a 1000 euro, quale dovrebbe essere un prezzo equo per la lotteria A? Quale il prezzo equo per la lotteria B?
R. [Conviene comprare un biglietto nella lotteria B; Prezzo equo A=2€; Prezzo equo B=2,23€]

19 In Italia nel 2005 sono stati denunciati dalla polizia 2.579.124 crimini penali, nello stesso periodo in Danimarca sono stati denunciati 432.704 crimini. Sulla base di questi dati ritieni che sia più sicuro vivere in Danimarca?

20 In un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estraendo a caso una carta essa sia

a) un re;
b) una carta a denari;
c) una carta minore di 8;
d) una carta con punteggio pari.

21 Un mazzo di carte francesi è composto da 54 carte, 13 per seme e due jolly, i semi sono cuori e quadri di colore rosso, picche e fiori di colore nero. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una carta

a) sia un jolly,
b) sia un re,
c) sia l'asso di picche,
d) sia una carta di colore rosso.

22 Da un mazzo di 40 carte napoletane vengono tolte tutte le figure, calcola la probabilità di estrarre una carta a denari.

23 In un sacchetto vengono inserite 21 tessere, su ciascuna delle quali è stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Calcola la probabilità che estraendo a caso una tessera essa sia:

a) una consonante
b) una vocale
c) una lettera della parola MATEMATICA.

24 Nelle estrazioni del Lotto si estraggono dei numeri a caso compresi tra 1 e 90. Calcola la probabilità che il primo numero estratto si

a) il 90
b) un numero pari
c) un multiplo di 3
d) contenga la cifra 1.

25 In un ipermercato si sono venduti in un anno 1286 cellulari di tipo A e 780 cellulari di tipo B. Mentre erano ancora in garanzia sono stati restituiti 12 cellulari di tipo A e 11 cellulari di tipo B perché malfunzionanti. Comprando un cellulare di tipo A, qual è la probabilità che sia malfunzionante? Qual è la probabilità che sia malfunzionante un cellulare di tipo B?

26 Quando vado al lavoro parcheggio l'auto nei parcheggi a pagamento ma non sempre compro il biglietto del parcheggio. Precisamente lo compro il lunedì e il giovedì, non lo compro il martedì e il mercoledì, il venerdì vado sempre con l'auto di un collega, il sabato e la domenica non lavoro. Quando vado al lavoro, che probabilità ho di prendere la multa per non aver pagato il parcheggio?

27 Un semaforo mostra il rosso per 120”, il verde per 60”, il giallo per 10”. Qual è la probabilità di incontrare il semaforo quando è verde?

28 La seguente parte di tabella tratta da una pubblicazione di Eurostat (la struttura dell'Unione Europea per le statistiche) indica il totale dei cittadini residenti di alcuni paesi europei distinguendo se sono indigeni, se appartengono a paesi dell'Unione Europea, oppure se non vi appartengono.

	Popolazione per cittadinanza (in milioni al 1.1.2006)			
	Indigeni	Non Indigeni		
	Totale	Totale	… appartenenti a paesi EU-27	… appartenenti a paesi non EU-27
EA-13	294 994	21 697	7 734	13 963
BE	9 611	900	620	280
BG	7 693	26	4	22
CZ	9 993	258	94	164
DK	5 157	270	74	196
DE (2)	75 149	7289	2 257	5 032
EE (3)	1 103	242	5	237
IE	3 895	314	215	99
EL	10 241	884	157	727
ES	39 756	4003	1 326	2 677
FR	59 489	3510	1 314	2 196
IT	56 081	2671	539	2 132

Le sigle dei paesi indicate nella tabella sono le seguenti:
BE: Belgio
BG: Bulgaria
CZ: Repubblica Ceca
DK: Danimarca
DE: Germania
EE: Estonia
IE: Irlanda
EL: Grecia
ES Spagna
FR Francia
IT Italia
EU-27 sono i 27 paesi appartenenti all'unione Europea dal 1 gennaio 2007
EA-13 sono i 13 paesi appartenenti all'euro dal 1 gennaio 2007

Valuta le probabilità che estratto un cittadino in Italia e in Francia questi siano non appartenenti all'Europa dei 27.

►3. Probabilità dell'evento complementare

Abbiamo visto nelle regole della probabilità l'importante relazione $P(\overline{E})=1-P(E)$, cioè che la probabilità dell'evento complementare è uguale a uno meno la probabilità dell'evento.
Consideriamo la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia un punteggio uguale a 5. Considerando equiprobabili l'uscita di una qualsiasi faccia del dado, i casi possibili sono 36 (ogni faccia del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado), mentre i casi favorevoli all'evento sono 4, precisamente (1,4), (4,1), (2,3) e (3,2). Quindi $P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.
Se vogliamo conoscere la probabilità dell'evento complementare cioè la probabilità che la somma delle due facce del dado non sia uguale a 5, risulterebbe piuttosto laborioso trovare tutti i casi in cui la somma delle due facce sia uguale a 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, si può invece applicare la regola $P(\overline{E})=1-P(E)$ cioè nel nostro caso $P(\overline{E})=1-P(E)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.
Dalla formula sulla probabilità dell'evento complementare ricaviamo anche che $P(E)=1-P(\overline{E})$ che risulta molto utile nel risolvere alcuni problemi. A volte è più facile o indispensabile calcolare la probabilità dell'evento complementare che calcolare direttamente la probabilità dell'evento.

29 La seguente tabella è tratta dalla tavola di mortalità dei maschi al 2002 relativa a una popolazione di 100000 individui:

Fascia di età	$0\le x<20$	$20\le x<40$	$40\le x<60$	$60\le x<80$	$80\le x<100$	$x\ge 100$
N. Decessi	997	1909	7227	39791	49433	643

Calcola la probabilità per un individuo dell'età di 20 anni di vivere almeno per altri 40 anni.
R. $P(E)=0{,}91$

30 Calcola la probabilità di vincita dell'Italia ai campionati mondiali di calcio se i bookmaker scommettono su una sua vincita 12 a 5.
R. $P(E)=0{,}71$

31 In un incontro di boxe il pugile Cacine viene dato a 1:7 contro il detentore del titolo Pickdur.
A) Secondo gli allibratori, quale la probabilità ha Cacine di conquistare il titolo?
B) Quali le poste per Pickdur?
R.[$P(A)=\frac{1}{8}=0{,}125$,poste per Pickdur 7:1]

32 Quanto devo puntare su Celestino, che viene dato vincente 4:21 per riscuotere 500 €? R.[80€]

33 Un cubo di legno viene verniciato e successivamente segato parallelamente alle facce in modo da ottenere 1000 cubetti. Quanti tagli sono necessari? Qual è la probabilità che, una volta mescolati i cubetti, si estragga:
A) un cubetto con una sola faccia verniciata,
B) un cubetto con due facce verniciate,
C) un cubetto con nessuna faccia verniciata.
R. [Tagli necessari =27 $P(A)=0{,}384$ $P(B)=0{,}096$ $P(C)=0{,}512$]

34 In un circolo vi sono 100 soci. Di essi si sa che 44 sanno giocare a dama, 39 a scacchi, 8 sanno giocare sia a dama che a scacchi. Estraendo a sorte uno dei 100 soci, qual è la probabilità che sia una persona che non sappia giocare ad alcun gioco. R. $P(E)=0{,}25$

35 Da un mazzo di 40 carte si estrae 1 carta. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
A) La carta non è di spade;
B) La carta non è una figura;
C) La carta non è un 2. R. $P(A)=\frac{3}{4}$; $P(B)=\frac{7}{10}$; $P(C)=\frac{9}{10}$

36 Calcola la probabilità che lanciano 4 volte una moneta equilibrata esca almeno una testa.
R. $P(E)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

►4. Probabilità dell'unione di due eventi

La misura della probabilità si può applicare a tutti gli eventi individuati dall'insieme delle parti degli eventi elementari $\wp(\Omega)$. Qualsiasi evento si può definire come sottoinsieme dell'insieme elementare (elencando gli eventi elementari che ne fanno parte) oppure enunciando una proposizione vera nel caso in cui l'evento si verifichi. Possiamo quindi poter esprimere la probabilità su eventi composti da due o più eventi di $\wp(\Omega)$ attraverso le operazioni di unione e intersezione tra insiemi che corrispondono alle operazioni di disgiunzione inclusiva e di congiunzione nelle proposizioni.
Per la probabilità dell'evento unione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro incompatibili e eventi tra loro compatibili.

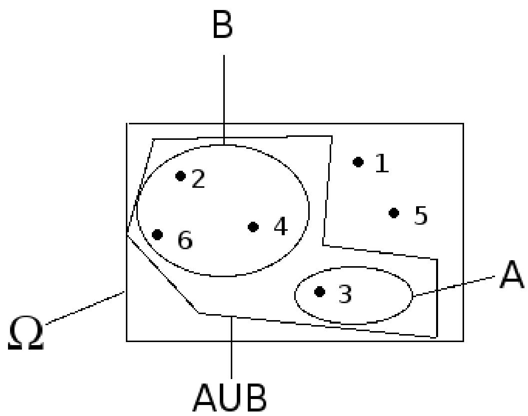
Unione di due eventi tra loro incompatibili

Abbiamo già visto questo caso quando abbiamo definito la probabilità. Due eventi si dicono incompatibili, quando non si possono verificare contemporaneamente: cioè quando $A\cap B=\emptyset$. In questo caso la probabilità dell'evento unione è dato dalla uguaglianza:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

- *Nel lancio di un dado regolare calcolare la probabilità dell'uscita del numero 3 o di un numero pari.*

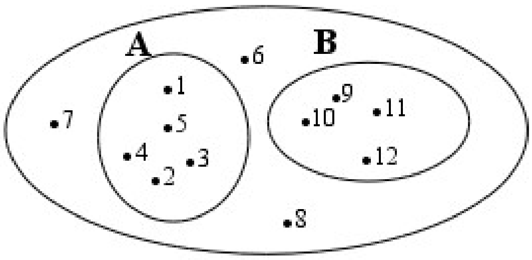
A) Uscita del numero 3
B) Uscita di un numero pari



Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi. Dato che i due eventi sono incompatibili, cioè: $A\cap B=\emptyset$: abbiamo $P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$

- *Da un'urna che contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero minore di 6 o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:
A) Si presenta una pallina con il numero minore di 6.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.
Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.



I due eventi sono incompatibili quindi:

$$A\cap B=\emptyset \quad\rightarrow\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Unione di due eventi tra loro compatibili

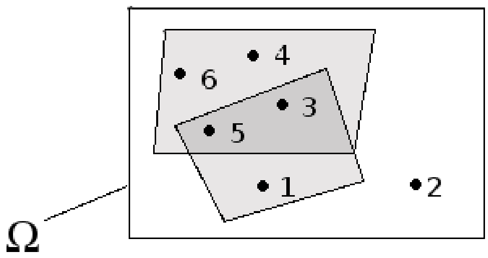
Se $A \cap B \neq \emptyset$ i due eventi si possono verificare congiuntamente. In questo caso la probabilità dell'unione dei due eventi sarà data da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Può essere utile per avere un'idea intuitiva di questa regola pensare alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi. Se voglio la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su A che addiziono a quella presente su B a cui devo togliere la massa presente su $A \cap B$ che è stata contata due volte.

- *Consideriamo il lancio di un dado regolare, vogliamo trovare la probabilità dell'uscita di un numero maggiore di 2 o di un numero dispari.*

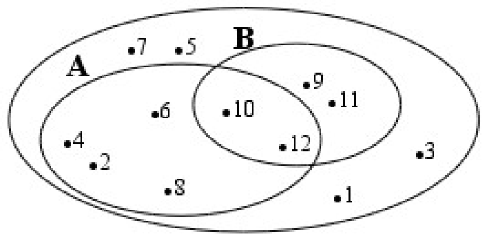
I due eventi sono:
A) Uscita di un numero maggiore di 2
B) Uscita di un numero dispari
I due eventi sono compatibili



$$A \cap B = \{5,3\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

- *Da un'urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero pari o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:
A) Si presenta una pallina con il numero pari.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.
Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.
I due eventi sono compatibili quindi**:**



$$A \cap B = \{10,12\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad .$$

- *Calcolare la probabilità che scegliendo a caso una carta da un mazzo di carte francesi di 54 carte si prenda una carta di picche o un re.*

Gli eventi sono compatibili in quanto è possibile estrarre una carta che verifichi entrambi le condizioni: un re di picche. Pertanto:

evento P = "estrarre una carta di picche" $p(P)=\frac{13}{54}$ le carte francesi sono 54, contengono 13 carte per ognuno dei 4 semi e 2 jolly.

Evento R = "estrarre un re" $p(R)=\frac{4}{54}$, i re sono 4, uno per ciascun seme.

Evento $P \cap R$ "estrarre una carta di picche che sia re" $p(P \cap R)=\frac{1}{54}$

Evento $P \cup R$ "estrarre una carta di picche o un re"

$$p(P \cup R)=p(P)+p(R)-p(P \cap R)=\frac{13}{54}+\frac{4}{54}-\frac{1}{54}=\frac{13+4-1}{54}=\frac{16}{54}\approx 29{,}6\,\%$$

■ *Calcolare la probabilità che estraendo a caso un numero della tombola esso contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.*

La prima domanda da farsi è se i due eventi sono compatibili o incompatibili. Poiché esistono numeri della tombola che contengono la cifra 5 e che sono anche multipli di 5 (per esempio 15, 50...) i due eventi sono compatibili. Di conseguenza bisogna applicare la regola $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

A = "estrarre un numero che contiene la cifra 5" questi numeri sono: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, …, 59, 65, 75, 85, in tutto 18 ne segue che $p(A)=\frac{18}{90}$;

B = "estrarre n multiplo di 5" i multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, … due per ogni decini, quindi 18 in tutto, ne segue che $p(B)=\frac{18}{90}$;

$A\cap B$ = "estrarre un cifra che contiene 5 ed è multiplo di 5" questi numeri sono 5, 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85 in tutto sono 10 $p(A\cap B)=\frac{10}{90}$;

$A\cup B$ = "estrarre un numero che contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5"

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{90}+\frac{18}{90}-\frac{10}{90}=\frac{26}{90}\approx 0{,}29\approx 29\%$.

37 Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero dispari o minore di 4.

R. $P(E)=\frac{2}{3}$

38 Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero pari o minore di 2.

R. $P(E)=\frac{2}{3}$

39 Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità che sia un 3 o una carta di spade

R. $P(E)=\frac{13}{40}$

40 Da un'urna che contiene 5 palline rosse, 8 palline blu, 12 palline bianche, 15 palline gialle, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina sia rossa o blu o gialla. R. $P(E)=\frac{7}{10}$

41 Da un'urna che contiene 30 palline identiche numerate da 1 a 30, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che il numero della pallina sia minore di 20 o multiplo di 4. R. $P(E)=\frac{11}{15}$

42 Per un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità di estrarre

a) un asso o un re,
b) un sette o una carta a bastoni,
c) una figura o una carta a denari.

43 Calcola la probabilità che lanciando un dado a sei facce esca un numero pari o un multiplo di 3.

44 Nel gioco della tombola si estrae una pallina numerata da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità che estraendo la prima pallina essa riporti

a) un multiplo di 5 o un multiplo di 10,
b) un numero pari o un multiplo di 5,
c) un numero che contenga la cifra 5 o la cifra 2.

►5. La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

Dati due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ ci proponiamo di calcolare la probabilità dell'evento intersezione cioè $P(A \cap B)$ partendo dalla probabilità degli eventi componenti *P(A)* e *P(B)*. Si tratta quindi di stimare con quale probabilità i due eventi avvengono congiuntamente. Occorre innanzitutto verificare che i due eventi non siano incompatibili in quanto in questo caso l'evento intersezione è impossibile.
Per la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro **indipendenti** e eventi tra loro **dipendenti**.

Intersezione di due eventi tra loro indipendenti

Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi di A non cambia la probabilità del verificarsi di B.

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando una moneta e un dado regolari esca testa e un numero maggiore di 4.*

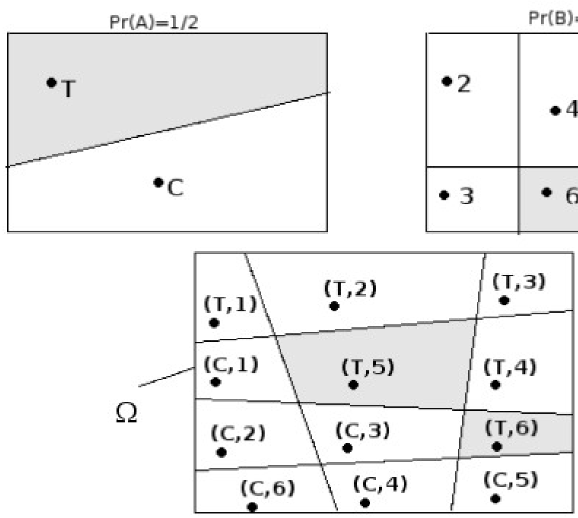
Evento A = “Uscita di Testa nel lancio di una moneta” $P(A)=\frac{1}{2}$.

Evento B = “Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado” $P(B)=\frac{2}{6}$.

Evento $(A \cap B)$ = “Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado”.
Vediamo come determinare $P(A \cap B)$.
Notiamo subito una situazione diversa rispetto a quella precedente dell'unione di due eventi. Nel caso precedente, lo spazio degli eventi era lo stesso per l'evento A per l'evento B e per l'evento unione $(A \cup B)$.
Ora invece per l'evento A l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_1=\{T, C\}$, per l'evento B invece, l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$. L'evento $(A \cap B)$ ha il seguente insieme degli eventi elementari: $\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$.
Lo spazio degli eventi elementari dell'intersezione è dato dal prodotto cartesiano dello spazio elementare di A moltiplicato per quello di B. Si può calcolare la probabilità in due modi:

<u>1° modo</u>
Indicare i casi favorevoli e i casi possibili rispetto all'evento intersezione:
i casi favorevoli all'evento sono 2 $(A \cap B)=\{(T,5);(T,6)\}$;
i casi possibili sono 12 $\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$.

$P(A \cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$



<u>2° modo</u>
Dato che i due eventi non si influenzano, supponiamo di procedere con due scelte successive: prima il lancio della moneta con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ e poi il lancio del dado con probabilità pari a $\frac{2}{6}$.
Passando dalla prima scelta alla seconda scelta i casi possibili diventano 12 in quanto i due casi possibili del lancio della moneta si compongono con i sei casi possibili del lancio del dado. I casi favorevoli sono due, uno per il lancio della moneta che si compone con i due casi favorevoli nel lancio del dado. Quindi si tratta di moltiplicare le probabilità dei singoli eventi.

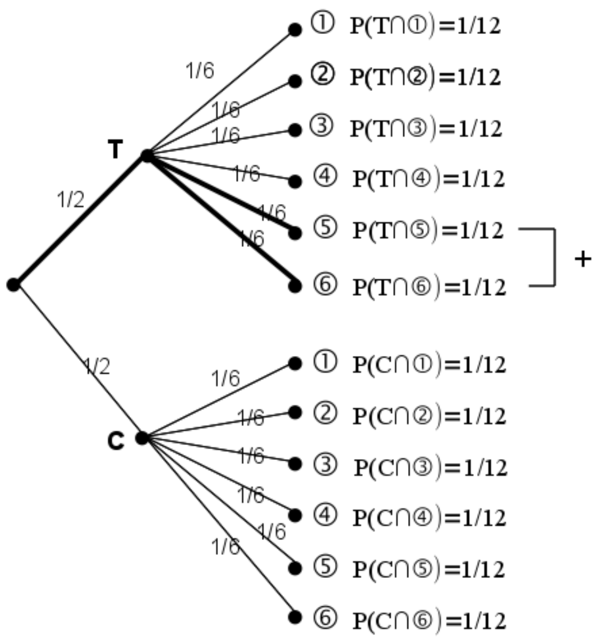
- Evento *A = Uscita di Testa nel lancio di una moneta* $P(A)=\frac{1}{2}$
- Evento *B = Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado* $P(B)=\frac{2}{6}$
- Evento $(A\cap B)$ *= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado* $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{12}$

Dati due eventi aleatori A e B tra loro indipendenti la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è data dalla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B:

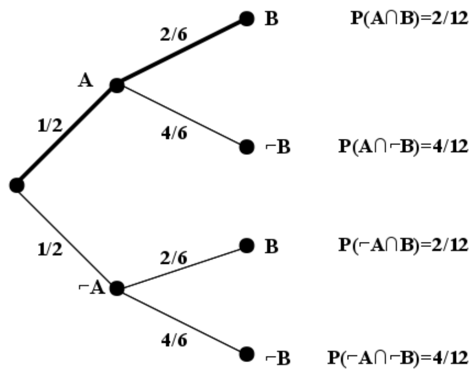
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Diagrammi ad albero

Una rappresentazione grafica che può risultare utile nello studio della probabilità dell'evento intersezione detto anche studio delle **probabilità composte** è il diagramma ad albero. Le linee dell'albero si dicono **rami**, mentre i punti da cui partono e arrivano i rami si dicono **nodi,** il nodo iniziale si chiama **radice**.
La costruzione di un diagramma ad albero nel caso delle probabilità composte consente di eseguire un'analisi completa di tutti i possibili esiti di una prova. Ogni percorso dell'albero che va dalla radice al nodo terminale indica una sequenza di eventi congiunti, incompatibile con qualsiasi altro percorso dell'albero. La probabilità di ogni singolo evento si indica sui rami, allora moltiplicando le probabilità che si incontrano nel percorso si ottiene la probabilità della congiunzione degli eventi che formano il percorso. Dato che ogni percorso che va dalla radice al nodo terminale individua eventi incompatibili, se vogliamo trovare l'unione di due o più percorsi possiamo semplicemente sommarli.
L'esempio precedente può essere schematizzato in questo modo:



L'albero può essere semplificato considerando gli eventi coinvolti e i loro complementari.



- *In un'urna abbiamo tre palline bianche e due nere. Facciamo due estrazioni rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità dell'uscita di una pallina nera nelle due estrazioni.*

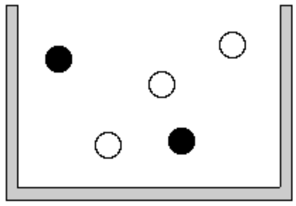
Evento B_1= nella prima estrazione pallina bianca $P(B_1)=\frac{3}{5}$

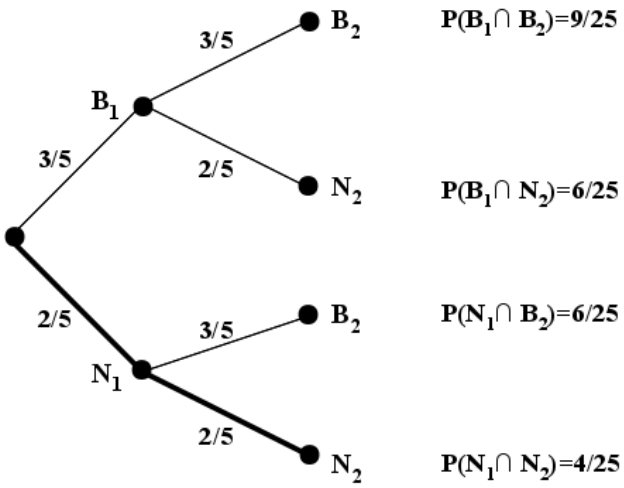
Evento B_2= nella seconda estrazione pallina bianca $P(B_2)=\frac{3}{5}$ in quanto la pallina si rimette nell'urna

Evento N_1= nella prima estrazione pallina nera $P(N_1)=\frac{2}{5}$

Evento N_2= nella seconda estrazione pallina nera $P(N_2)=\frac{2}{5}$

Evento $(N_1 \cap N_2)$ = nelle due estrazioni pallina nera $P(N_1 \cap N_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ in quanto i due eventi sono indipendenti.





Il problema è sempre lo stesso: calcolare una probabilità su un insieme prodotto partendo dalle probabilità degli eventi componenti. Devo moltiplicare la probabilità di avere nera nella prima estrazione $P(N_1)=\frac{2}{5}$ con la probabilità di avere nera nella seconda estrazione $P(N_2)=\frac{2}{5}$ in quanto, l'uscita della prima pallina nera, evento considerato ora come avvenuto, non influenza la probabilità di avere nera alla seconda estrazione in quanto la pallina estratta viene rimessa nell'urna.

Le domande che posso fare su questo esperimento sono relative allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. ove $\Omega=\{(B_1,B_2);(B_1,N_2);(N_1,B_2);(N_1,N_2)\}$ sono del tipo "Quale è la probabilità che escano palline di diverso colore", "Qual è la probabilità che la prima pallina sia bianca", ecc.

Il problema del Cavalier de Méré

Il Cavalier de Méré pose al grande matematico francese Blaise Pascal nel 1654 il seguente problema: *perché scommettendo alla pari sull'evento A= "ottenere almeno una volta un 6 in 4 lanci di un dado" ho accumulato una fortuna, mentre rischio la rovina scommettendo alla pari sull'evento B= "ottenere almeno una coppia di 6 in 24 lanci di due dadi".*

Scommettere alla pari 1:1 significa assegnare alla probabilità degli eventi A e B il valore pari a $\frac{1}{2}$.

Considériamo la probabilità dell'evento A composto dai quattro eventi indipendenti ma non incompatibili E_1=ottenere 6 nel primo lancio, E_2=ottenere 6 nel secondo lancio, E_3=ottenere 6 nel terzo lancio, E_4=ottenere 6 nel quarto lancio.

In questo caso come è stato osservato in precedenza, conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{A}=(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4)$ = "non ottenere un 6 in quattro lanci di un dado". Dato che gli eventi sono indipendenti e equiprobabili e $P(\overline{E}_1)=P(\overline{E}_2)=P(\overline{E}_3)=P(\overline{E}_4)=\frac{5}{6}$. I valori di ciascun evento vanno moltiplicati tra loro per la regola vista in precedenza. Quindi $P(\overline{A})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{625}{1296}=0{,}482$.
La probabilità dell'evento A sarà quindi superiore a 0,5 in quanto $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}482=0{,}518$ e in un numero considerevole di scommesse il Cavalier de Méré accumulava una fortuna.
Consideriamo ora la probabilità dell'evento B, dove valgono considerazioni analoghe. Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{B}$. Dato che i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36 il caso favorevole all'evento 6 nel primo dado e 6 nel secondo dado è uno soltanto. Se $P(B)=\frac{1}{36} \rightarrow p(\overline{B})=1-P(B)=\frac{35}{36}$. Dato che i lanci dei due dadi sono 24 avremo $p(\overline{B})=\frac{35^{24}}{36^{24}}=0{,}509$ da cui $P(B)=1-0{,}509=0{,}491$ è spiegato come mai in un grande numero di scommesse scommettendo alla pari il Cavalier de Méré si rovinasse.

45 Nel lancio di due monete qual è la probabilità che una almeno sia croce? R. $P(E)=\frac{3}{4}$

46 Nel lancio di due dadi qual è la probabilità di avere un totale di 8 o due numeri uguali? R. $P=\frac{5}{18}$

47 Qual è la probabilità nel lancio di due dadi che la somma dei punti sia almeno 9? R. $P(E)=\frac{15}{18}$

48 Punto 7 euro nel lancio di due dadi sulla somma delle facce uguale a 5. Quanto devo ricevere perché il gioco sia equo? R. 63 €

49 La probabilità che un proiettile colpisca un determinato bersaglio è 0,5. Qual è la probabilità che tre proiettili lanciati uno dopo l'altro colpiscano tutti il bersaglio. R. $P(E)=0{,}125$

50 Due persone giocano con le dita di entrambe le mani a pari e dispari. Con una posta 1:1 conviene giocare sul pari o sul dispari? R. *indifferente*

51 Un allievo cuoco prepara la cena. La probabilità che la minestra sia troppo salata è pari a 0,3 e che l'arrosto bruci sia pari a 0,4. Qual è la probabilità che la cena riesca bene? R. $P(E)=0{,}42$

52 Una scopa elettrica è formata da due apparati: il motore che si guasta una volta su 10 dopo un anno e la carrozzeria che si rompe una volta su 100 dopo un anno. Che probabilità ha la scopa elettrica di essere funzionante dopo un anno? R. $P(E)=89{,}1\,\%$

53 Una coppia ha caratteri ereditari tali che ogni loro figlio ha probabilità pari a 1/4 di essere malato. I genitori vorrebbero avere due figli.
A) Qual è la probabilità che entrambi siano sani?
B) Qual è la probabilità di avere almeno un figlio malato R. P(A)=9/16; P(B)=7/16

54 Determinare la probabilità che lanciando tre volte una moneta si presentino
A) 3 Teste
B) 1 Testa
C) 2 Teste R. P(A)=1/8; P(B)=3/8; P(C)=3/8

55 Nel lancio di una moneta e di un dado calcolare la probabilità di:
A) Ottenere Croce e il 6
B) Ottenere Testa e un numero multiplo di 2
C) Ottenere Croce e un numero maggiore di 2 R. P(A)=1/12; P(B)=1/4;P(C)=1/3

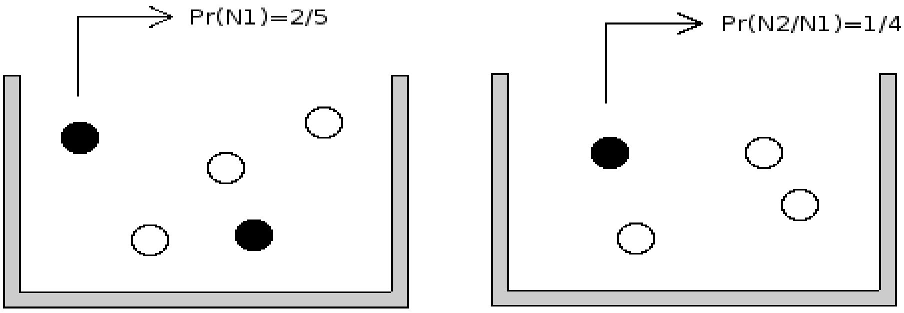
56 In un'urna ci sono 6 palline, di cui 2 nere e 4 bianche: calcola la probabilità di estrarre palline di diverso colore nel caso in cui la prima pallina viene rimessa nell'urna. R. P(E)=5/9

57 Un'urna U1 contiene 10 palline rosso e 15 bianche, un'urna U2 contiene 12 palline rosso e 13 palline bianche. Calcola la probabilità che estraendo una pallina da U1 e una pallina da U2 siano entrambe rosse.

Intersezione di due eventi tra loro dipendenti

- *Si richiede la probabilità di avere due palline nere in due estrazioni in un'urna contenente tre palline bianche e due nere, questa volta però senza rimettere la pallina nell'urna.*

Dato che vogliamo calcolare la probabilità dell'evento intersezione $(N_1 \cap N_2)$ questa sarà data dalla probabilità dell'evento N_1 moltiplicata per la probabilità dell'evento N_2 dopo che si è verificato l'evento N_1. La probabilità dell'evento N_2 dopo il verificarsi di N_1 non è la stessa dell'esperimento precedente in quanto la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.



$P(N_2/N_1)$ significa probabilità di N_2 dopo che si è verificato N_1.

La probabilità dell'insieme intersezione diventa: $P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

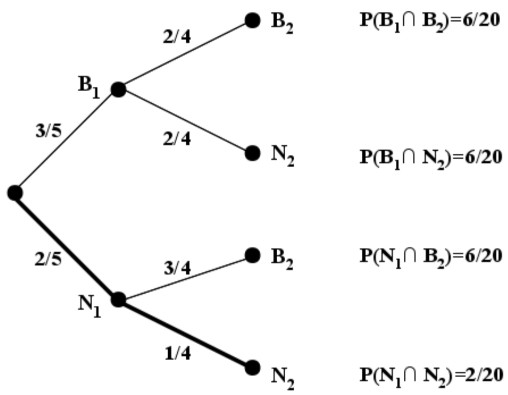
Esaminiamo le probabilità di questo esperimento (estrazione dall'urna senza rimettere la pallina nell'urna) degli eventi elementari appartenenti a Ω con $\Omega = \{(B_{1,} B_2);(B_{1,} N_2);(N_{1,} B_2);(N_{1,} N_2)\}$

- Una scatola di caramelle contiene 20 caramelle assortite alla frutta, incartate allo stesso modo e quindi irriconoscibili. Di esse 14 sono al limone. Fabio ne mangia 2. Qual è la probabilità che siano tutte e due al limone?

Evento E1 = "la prima caramella è al limone" $p(E1) = \frac{14}{20}$.

L' evento E2 = "la seconda è al limone" è dipendente dal primo, perché se Fabio ha mangiato una caramella al limone nella scatola rimangono 19 caramelle di cui 13 al limone $p(E2) = \frac{13}{19}$.

$p(E1 \cap E2) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190} \approx 0{,}479 \approx 47{,}9\%$.



►6. Probabilità condizionata

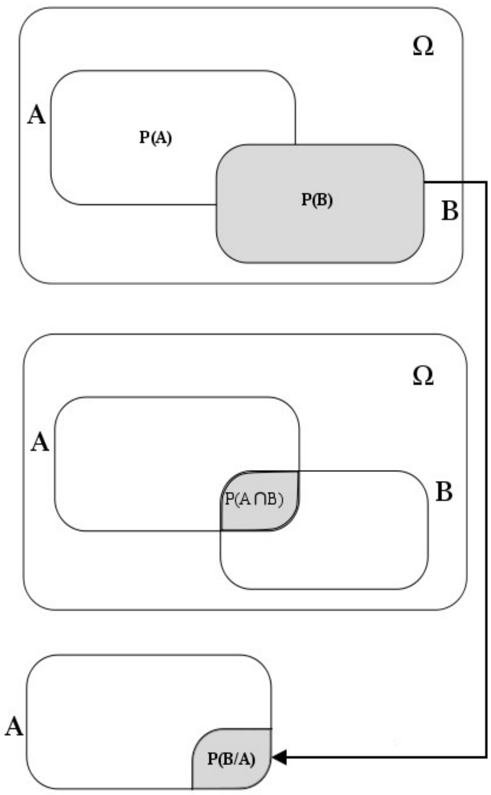
DEFINIZIONE. Si dice **probabilità condizionata** di A rispetto a B e si indica con $P(A/B)$ la probabilità di A dopo che si è verificato B

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE. Dati due eventi aleatori A e B qualsiasi la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è dato dalla probabilità di A moltiplicata la probabilità di B dopo che A si è verificato. In simboli $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$.

Dato che $A\cap B=B\cap A$ anche $P(A\cap B)=P(B\cap A)$ quindi $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$.
Possiamo ora meglio stabilire quando due venti sono dipendenti e quando sono indipendenti.

DEFINIZIONE. Due eventi $A, B\in \wp(\Omega)$ si dicono indipendenti se la probabilità di A e la probabilità di A subordinata a B sono uguali. Dipendenti nel caso contrario.
$P(A)=P(A/B)$ **eventi indipendenti**
$Pr(A)\neq P(A/B)$ **eventi dipendenti**

Il teorema delle probabilità totali vale sia nel caso di eventi dipendenti che indipendenti.



Cerchiamo di dare una interpretazione insiemistica alla probabilità condizionata.
Dalla uguaglianza del teorema delle probabilità composte isoliamo la probabilità condizionata per meglio individuare qual è il suo significato. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$ Da ciò segue

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Mettiamo a confronto $P(B)$ e $P(B/A)$ aiutandoci con i diagrammi di Venn.
Immaginiamo la misura della probabilità come una massa unitaria da spalmare sull'evento. La probabilità B è la quantità di massa da spalmare sull'evento B in relazione allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. Nell'ipotesi di ricevere un'ulteriore informazione dal verificarsi di A, questa informazione modifica la probabilità di B. L'insieme di riferimento per la probabilità di B non sarà più $\wp(\Omega)$, ma $\wp(A)$ e $P(B/A)$ sarà data dal rapporto della massa spalmata tra ciò che hanno in comune A e B cioè $P(A\cap B)$ e la probabilità di A cioè $P(A)$:
$P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
Se $P(B/A)=P(B)$ la parte della massa unitaria spalmata su B e il rapporto tra la massa spalmata sull'intersezione tra A e B e la massa spalmata su A rimane invariato e i due eventi si dicono indipendenti.
Se $P(B/A)>P(B)$ si dice che l'evento B è correlato positivamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A aumenta la probabilità dell'evento B.
Se $P(B/A)<P(B)$ si dice che l'evento B è correlato negativamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A diminuisce la probabilità dell'evento B.

Osservazioni

Due eventi A e B tra loro incompatibili cioè tali che $P(A\cap B)=0$ sono fortemente dipendenti. Infatti
$P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0}{P(A)}=0;\quad P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0}{P(B)}=0$.
La probabilità di A condizionato B è in genere diversa dalla probabilità di B condizionato A in quanto pur avendo lo stesso numeratore hanno denominatore diverso: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\neq P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
Dato che la probabilità dell'intersezione di due eventi è la stessa abbiamo
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$.

- *Conviene scommettere alla pari che in una classe composta da 23 alunni, due persone compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese?*

Scommettere alla pari significa intanto attribuire alla probabilità dell'evento A il valore di 0,5. Se la probabilità dell'evento è maggiore di 0,5 conviene scommettere altrimenti no.
Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $P(\overline{A})$ = la probabilità che nessuno dei 23 allievi compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese.
$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2} \ldots \overline{A_{21}} \cap \overline{A_{22}} \cap \overline{A_{23}})$ dove $\overline{A_i}$ rappresenta la probabilità che il compleanno dell'alunno *i*-esimo non coincida con nessuno dei compleanni degli altri alunni.
Analizziamo alcune di queste probabilità e applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A_1}) = \frac{365}{365}\ ;\quad P(\overline{A_2}/\overline{A_1}) = \frac{364}{365}\ ;\quad P(\overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{363}{365}\ ;\quad P(\overline{A_4}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \frac{362}{365}\ ;\ \ldots$$

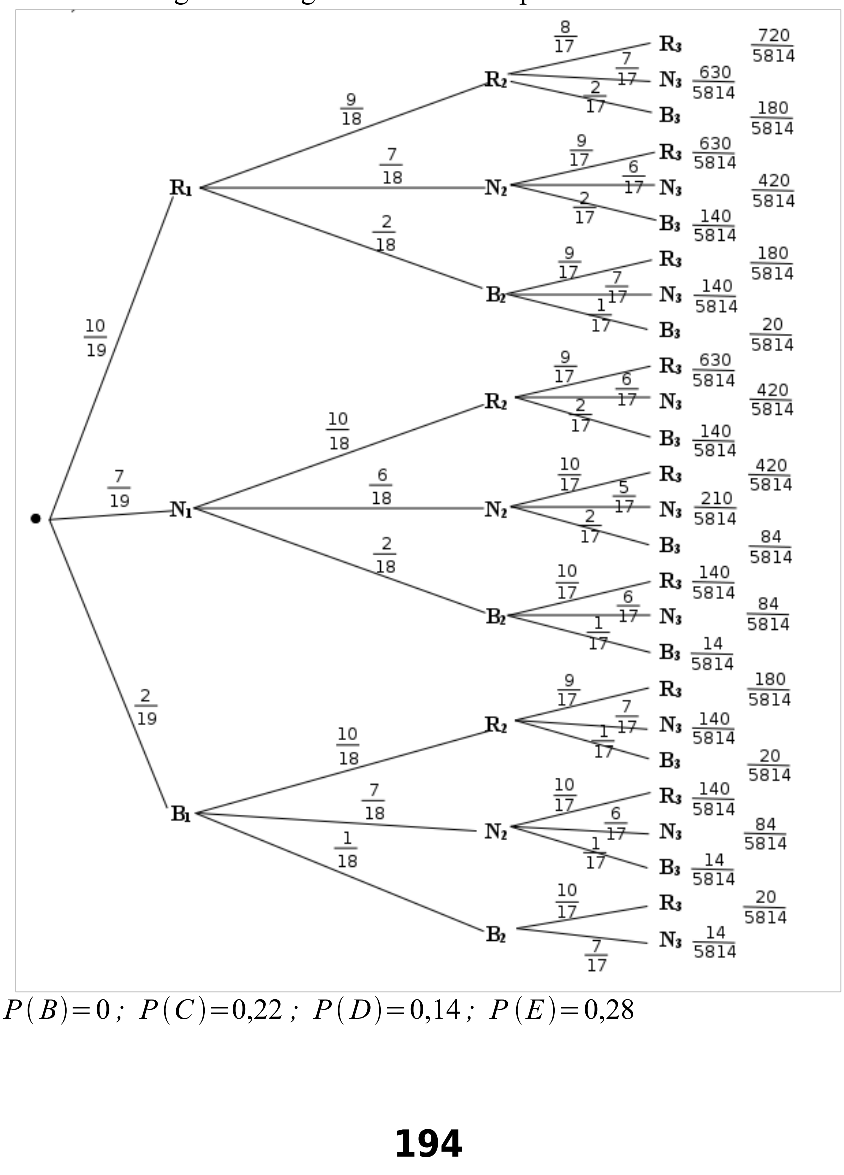
e così via fino ad arrivare a $P(\overline{A_{23}}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2} \ldots \overline{A_{21}} \cap \overline{A_{22}} \cap \overline{A_{23}}) = \dfrac{343}{365}$.

Il primo allievo avrà la certezza di non avere alcun allievo che compie gli anni nello stesso suo giorno; il secondo allievo avrà una probabilità pari a 364 giorni su 365 di non compiere gli anni nello stesso giorno del primo, il terzo allievo una probabilità di 363 giorni su 365 condizionata a non compiere gli anni lo stesso giorno del primo e del secondo e così via fino alla probabilità dell'ultimo allievo pari a 343 giorni su 365 di non compiere gli anni lo stesso giorno dei propri compagni.
Ora applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \ldots \cdot \frac{345}{365} \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots (365-23+1)}{365^{23}} = 0{,}493$$

Dato che $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}493 = 0{,}507$.
Conclusione: conviene scommettere alla pari sull'evento A.

58 Un'urna contiene 10 palline rosse, 7 palline nere e 2 bianche. Estraendone simultaneamente, tre calcolare la probabilità: a) tutte e tre rosse; b) tutte e tre bianche; c) 1 rossa e 2 nere; d) tutte di colore diverso; e) una sola bianca. Di seguito il diagramma ad albero per aiutarti nella soluzione:



R. $P(A)=0{,}12\ ;\ P(B)=0\ ;\ P(C)=0{,}22\ ;\ P(D)=0{,}14\ ;\ P(E)=0{,}28$

59 Da un mazzo di 40 carte, si estrae una carta a caso. Determina la probabilità:

A) Che esca un Re
B) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscita una figura
C) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscito il seme di fiori
D) Che esca il seme di fiori dopo che è uscito un Re
E) Tra gli eventi A), B), C) e D) quali sono indipendenti?

$$P(A)=\frac{1}{10}\,;\ P(B)=\frac{1}{3}\,;\ P(C)=\frac{1}{10}\,;\ P(D)=\frac{1}{4}\,;\ A\ e\ C$$

60 Uno studente universitario ha la probabilità 0,3 di superare l'esame di matematica e 0,5 di superare l'esame di diritto privato. Se i due eventi sono indipendenti determinare la probabilità che lo studente ha di superare

A) Tutti e due gli esami
B) Almeno un esame

$$P(A)=0{,}15\,;\ P(B)=0{,}65$$

61 Un'urna contiene 5 palline bianche e 12 nere. Estraendole due a caso qual è la probabilità che siano dello stesso colore? $P(A)=0{,}56$

62 Uno studente ha la probabilità del 55% di prendere il debito in matematica, del 30% di prendere il debito in inglese e del 20% di prendere il debito in entrambe le materie. Valutare la probabilità di:

a) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo già preso in inglese.
b) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di averlo già preso in matematica.
c) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di non averlo preso in inglese.
d) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.
e) Non avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo preso in inglese.
f) Non avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.

R. $P(A)=67\%\,;\ P(B)=36\%\,;\ P(C)=50\%\,;\ P(D)=22\%\,;\ P(E)=33\%\,;\ P(F)=64\%$

►7. Dalla tavola statistica alla probabilità

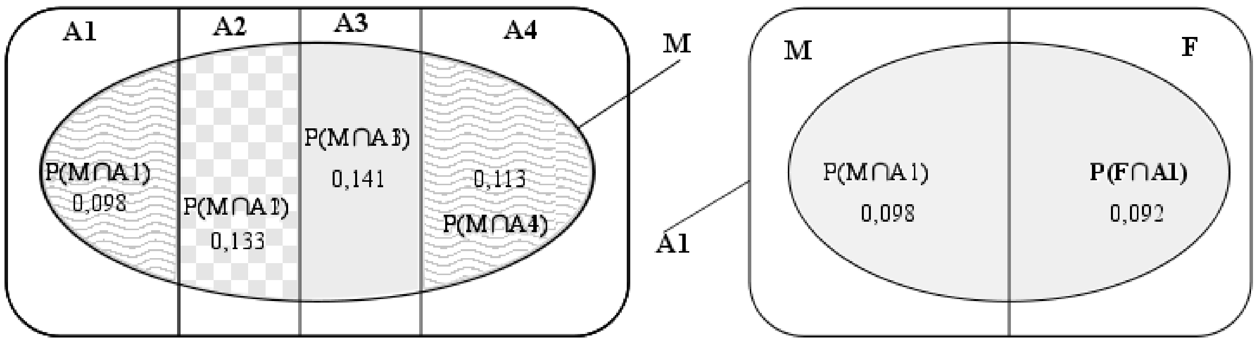
Consideriamo la seguente tabella che rappresenta la popolazione residente in Italia per classi di età e sesso al primo gennaio 2009 (migliaia di persone)

	$A_1: 0 \leq età < 20$	$A_2: 20 \leq età < 40$	$A_3: 40 \leq età < 60$	$A_4: età \geq 60$	Totale
M=Maschio	5867	8014	8473	6798	** Errore nell'espressione **
F=Femmina	5541	7845	8649	8857	** Errore nell'espressione **
Totale	** Errore nell'espressione **	** Errore nell'espressione **	** Errore nell'espressione **	** Errore nell'espressione **	** Errore nell'espressione **

L'esperimento in questo caso è costituito da una classificazione dei residenti secondo il sesso: (Maschi e Femmine) e classi di età (A_1, A_2, A_3, A_4). I valori assoluti presenti all'interno delle celle rappresentano le persone che hanno in comune due caratteri, cioè . $M \cap A_1 = 5867$, $F \cap A_3 = 8649$ e così via.
In questo caso gli eventi elementari sono rappresentati dalle intersezione delle modalità dei due caratteri:
$\Omega = \{(M, A_1); (M, A_2); (M, A_3); (M, A_4); (F, A_1); (F, A_2); (F, A_3); (F, A_4)\}$
Dato che il campione analizzato è l'intera popolazione italiana residente possono essere la base per il calcolo della probabilità. Per far questo passiamo alle frequenze relative come nella tabella seguente.

	$A_1: 0 \leq età < 20$	$A_2: 20 \leq età < 40$	$A_3: 40 \leq età < 60$	$A_4: età \geq 60$	Totale
M=Maschio	0,098	0,133	0,141	0,113	0,485
F=Femmina	0,092	0,131	0,144	0,148	0,515
Totale	0,190	0,264	0,285	0,261	1,000

Aiutiamoci con i diagrammi di Venn per analizzare il significato dei totali di riga e di colonna. L'esempio si riferisce al totale della prima riga (0,098+0,133+0,141+0,113=0,485) e della prima colonna (0,098+0,092=0,190).



Totale prima riga=0,098+0,133+0,141+0,113=0,485 **Totale prima colonna=0,098+0,092=0,190**

Dato che gli eventi intersezione sono tra loro incompatibili i totali di riga e di colonna detti anche **totali marginali** rappresentano le probabilità delle modalità semplici Maschio e Femmina e A_1, A_2, A_3, A_4 relative alle classi di età.
Ma c'è di più. Nella tabella così strutturata abbiamo a disposizione sia la probabilità dell'intersezione delle modalità degli eventi sia la probabilità degli eventi stessi. Possiamo calcolare così anche le probabilità condizionate.
Le condizioni per trattare la probabilità come negli esempi precedenti sono che gli eventi presenti nelle righe e nelle colonne della tabella, siano eventi **esaustivi** e **incompatibili**, in altre parole devono rappresentare un insieme di eventi elementari. Questo è sempre possibile dati due venti elementari A e B considerando gli eventi complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Esempio

- *Il daltonismo è una malattia genetica collegata al sesso e si osserva più frequentemente nei maschi che nelle femmine. Le frequenze relative della seguente tabella, osservate su un campione molto elevato di popolazione, possono essere usate come probabilità.*

	P(Daltonico)	P(Non daltonico)	Totale
P(Maschio)	8,1%	45%	53,1%
P(Femmina)	0,5%	46,4%	46,9%
Totale	8,6%	91,4%	100%

P(D) indica la probabilità di essere daltonico, questa probabilità si legge nel totale marginale della prima colonna ed è pari a 8,6%. La probabilità di non essere daltonico P(N) è data dal totale marginale della seconda colonna e rappresenta la probabilità complementare del primo evento pari a 91,4%.
I totali marginali di riga indicano la probabilità di essere maschio pari al 53,1% e la probabilità di essere femmina pari al 46,9%.
Nella tabella abbiamo tutte le probabilità che ci consentono di calcolare le probabilità condizionate. In particolare:
Probabilità condizionata che un maschio sia daltonico, incidenza del daltonismo per i maschi

$$P(D/M)=\frac{P(D\cap M)}{P(M)}=\frac{8{,}1\,\%}{53{,}1\,\%}=15{,}3\,\%$$

Probabilità condizionata che una femmina sia daltonica, incidenza del daltonismo per le femmine

$$P(D/F)=\frac{P(D\cap F)}{P(F)}=\frac{0{,}5\,\%}{46{,}9\,\%}=1{,}1\,\%$$

Probabilità condizionata che un daltonico sia maschio, incidenza dei maschi per il daltonismo

$$P(M/D)=\frac{P(D\cap M)}{P(D)}=\frac{8{,}1\,\%}{8{,}6\,\%}=94{,}2\,\%$$

Probabilità condizionata che un daltonico sia femmina, incidenza delle femmine per il daltonismo

$$P(F/D)=\frac{P(D\cap F)}{P(D)}=\frac{0{,}5\,\%}{8{,}6\,\%}=5{,}8\,\%$$

63 Supponiamo che il verificarsi della sordità sia indipendente dal sesso. Indicare e calcolare le quattro probabilità mancanti nella seguente tabella:

	Sordo	Non sordo	Totale
Maschio			0,531
Femmina			0,469
Totale	0,004	0,996	1,000

Esempio

- *Un test diagnostico è qualsiasi procedimento che sappia individuare se un individuo è soggetto a una determinata malattia cioè malato M^+ o sano M^-.*

Un test può dare esito positivo (cioè indicare che l'individuo è malato) T^+ o negativo (indicare che un individuo è sano) T^-. Si sa però che le indicazioni dei più comuni test non sono del tutto sicure, può accadere che un individuo risultato positivo al test sia invece sano e viceversa. Quindi è necessario dare una valutazione delle caratteristiche di un test diagnostico.
Immaginiamo che un determinato test diagnostico sia sotto sperimentazione e che i risultati ottenuti siano indicati dalla seguente tabella

	Positivo=T^+	Negativo=T^-	Totale
Malato = M^+	4120	512	4632
Sano = M^-	1560	4322	5882
Totale	5680	4834	10514

Dato che la popolazione coinvolta è considerata significativa, possiamo passare alle frequenze relative e considerarle come una valutazione della probabilità.

	Positivo=T^+	Negativo=T^-	Totale
Malato = M^+	39,2%	4,9%	44,1%
Sano = M^-	14,8%	41,1%	55,9%
Totale	54,0%	46,0%	100%

In ogni cella leggiamo la probabilità dell'intersezione dei due caratteri, mentre nei totali marginali la probabilità di essere malato e sano (totali di riga) e la probabilità che il test sia risultato positivo o negativo (totali di colonna).

- $P(M^+ \cap T^+) = 39{,}2\,\%$ probabilità che il test sia vero positivo
- $P(M^+ \cap T^-) = 4{,}9\,\%$ probabilità che il test sia falso negativo
- $P(M^- \cap T^+) = 14{,}8\,\%$ probabilità che il test sia falso positivo
- $P(M^- \cap T^-) = 41{,}1\,\%$ probabilità che il test sia vero negativo
- $P(M^+) = 44{,}1\,\%$ probabilità di essere malato
- $P(M^-) = 55{,}9\,\%$ probabilità di essere sano
- $P(T^+) = 54{,}0\,\%$ probabilità che il test sia positivo
- $P(T^-) = 46{,}0\,\%$ probabilità che il test sia positivo

Questo è quello che ci dicono i dati grezzi della precedente tabella. Ma con alcuni semplici calcoli si possono calcolare le probabilità condizionate, che ci danno informazioni più rilevanti. In particolare:

- **Sensibilità del test** cioè la probabilità che un malato sia positivo
  $$P(T^+ / M^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{M^+} = \frac{39{,}2\,\%}{44{,}1\,\%} = 88{,}9\,\%$$
- **Specificità del test** cioè la probabilità che un sano sia negativo
  $$P(T^- / M^-) = \frac{P(T^- \cap M^-)}{M^-} = \frac{41{,}1\,\%}{55{,}9\,\%} = 73{,}5\,\%$$
- **Valore predittivo del test** cioè la probabilità che un positivo sia malato
  $$P(M^+ / T^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{T^+} = \frac{39{,}2\,\%}{54{,}0\,\%} = 72{,}6\,\%$$

64 Stimare la sensibilità, la specificità e il valore predittivo sulla base della seguente tabella:

	Positivo=T^+	Negativo=T^-
Malato=M^+	920	50
Sano=M^-	60	180

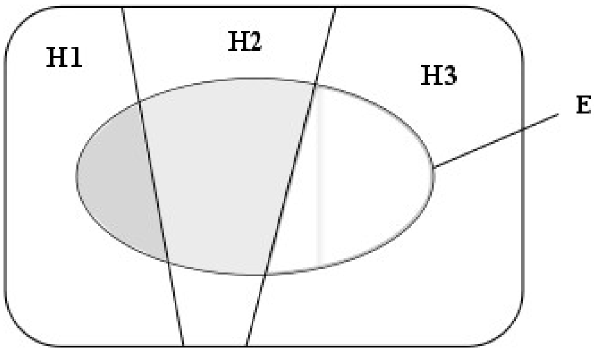
►8. Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes fornisce un metodo che consente di modificare l'opinione iniziale sul verificarsi di un evento (espressa sotto forma di probabilità a priori) sulla base delle informazioni fornite dall'esperienza che permettono di formulare nuove probabilità dette probabilità a posteriori.

Esempio

- *Supponiamo che un paziente vada a farsi visitare da un medico per la prima volta. Già prima di effettuare la visita il medico ha un'idea delle possibili malattie da cui potrebbe essere affetto: sa che molti dei suoi pazienti hanno disturbi di poco conto (evento H_1), alcuni hanno disturbi più gravi (evento H_2), altri ancora malattie rare (evento H_3). A questo punto il medico effettuerà la visita, sottoporrà il paziente ad una serie di analisi cliniche ed otterrà il quadro dei sintomi: potrà adesso formulare una diagnosi sul paziente.*

Vediamo che cosa rappresenta tutto ciò in termini di probabilità.
Indichiamo con H_1, H_2, H_3 le tre tipologie di malattia in ordine di rarità: sulla base delle informazioni che il medico sui propri pazienti può associare ad ognuno di questi eventi una probabilità a priori P(Hi).
In funzione della sintomatologia riscontrata (rappresentata dall'evento E) si possono determinare sulla base delle statistiche ufficiali a livello nazionale le probabilità condizionate P(E/Hi) che rappresentano le probabilità che si manifestino tali sintomi se un paziente è affetto da una delle tre tipologie di malattia.
Ciò che ci interessa è ricavare le probabilità a posteriori P(Hi/E), che rappresentano le probabilità che il paziente abbia contratto una delle tre malattie, sapendo che presenta i sintomi rappresentati da E. Su questa base si formulerà la diagnosi.
Si conoscono o si possono conoscere le seguenti probabilità:
probabilità sulla base dell'esperienza del medico $P(H_1)=0{,}65$; $P(H_2)=0{,}30$; $P(H_3)=0{,}05$;
probabilità dei sintomi evidenziati dal paziente condizionate alla gravità della malattia desunte dalle statistiche ufficiali: $P(E/H_1)=0{,}20$; $P(E/H_2)=0{,}60$; $P(E/H_3)=0{,}70$.
La situazione può essere rappresentata con un Diagramma di Venn:



Essendo H_1, H_2 e H_3 eventi incompatibili ed esaustivi, l'evento E può essere visto come unione di tre eventi disgiunti: $E\cap H_1$, $E\cap H_2$ e $E\cap H_3$

Quindi $P(E)=P(E\cap H_1)+P(E\cap H_2)+P(E\cap H_3)$

$P(E\cap H_1)=P(E/H_1)\cdot P(H_1)$; $P(E\cap H_2)=P(E/H_2)\cdot P(H_2)$; $P(E\cap H_3)=P(E/H_3)\cdot P(H_3)$ da cui

$P(E)=P(E/H_1)\cdot P(H_1)+P(E/H_2)\cdot P(H_2)+P(E/H_3)\cdot P(H_3)$

Nell'esempio: $P(E)=0{,}65\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}05\cdot 0{,}7=0{,}345$

Quello che a noi interessa sono in realtà le probabilità che il paziente abbia una delle tre tipologie di malattia sapendo che manifesta i sintomi rappresentati dall'evento *E*.

$P(H_i/E)=\dfrac{P\cap H_i}{P(E)}=\dfrac{P(E/H_i)\cdot P(H_i)}{P(E)}$ quindi

$P(H_1/E)=\dfrac{P(E/H_1)\cdot P(H_1)}{P(E)}$; $P(H_2/E)=\dfrac{P(E/H_2)\cdot P(H_2)}{P(E)}$; $P(H_3/E)=\dfrac{P(E/H_3)\cdot P(H_3)}{P(E)}$

Queste probabilità sono dette **probabilità a posteriori**.

Nell'esempio $P(H_1/E)=\dfrac{0{,}65\cdot 0{,}2}{0{,}345}=0{,}38$; $P(H_2/E)=\dfrac{0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}345}=0{,}52$; $P(H_3/E)=\dfrac{0{,}05\cdot 0{,}7}{0{,}345}=0{,}1$

Si può osservare che la conoscenza dei sintomi modifica in questo caso la diagnosi, in quanto la malattia più probabile non risulta quella più comune, bensì quella intermedia.

TEOREMA DI BAYES. Se $H_1, H_2, \ldots, H_n$ costituiscono un sistema di eventi incompatibili ed esaustivi ed E è un evento non impossibile, allora per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si ha la seguente uguaglianza:

$$P(H_i/E) = \frac{P(H_i) \cdot P(E/H_i)}{P(H_1) \cdot P(E/H_1) + P(H_2) \cdot P(E/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(E/H_n)}\ .$$

Il teorema di Bayes può quindi essere utilizzato ogni volta che abbiamo a che fare con un evento che può essere originato da *n* diverse cause tra loro incompatibili ed esaustive (o sul quale si possono formulare *n* ipotesi), delle quali si conosce la **probabilità a priori** e di cui si possono individuare, sulla base dell'esperienza, le probabilità $P(E/H_i)$ dette **probabilità probative** che ci permettono di modificare le nostre probabilità iniziali attraverso le **probabilità a posteriori** $P(H_i/E)$.

Esempio

- *Un sacchetto contiene 4 palline che possono essere bianche o nere. Effettuiamo 5 estrazioni, rimettendo sempre la pallina estratta nel sacchetto. Occorre stimare la composizione dell'urna, cioè di quante palline bianche e nere questa si compone.*

L'ipotesi di partenza senza conoscere la composizione dell'urna e senza aver effettuato alcun esperimento è che l'urna può contenere un numero di palline bianche compreso fra 0 e 4 e che ognuno di questi 5 eventi abbia la stessa probabilità, quindi $P(H_i) = \frac{1}{5}$ dove con H_i si indica l'ipotesi che l'urna contenga *i* palline bianche.

Procediamo all'estrazione, rimettendo ogni volta la pallina nel sacchetto, supponiamo che l'estrazione abbia dato il seguente risultato: 3 palline bianche e 2 nere, nel seguente ordine BBNBN.

Qual è la probabilità associata all'esperimento in ognuna delle cinque ipotesi formulate in precedenza?

Si tratta della probabilità dell'intersezione di 5 eventi indipendenti: una pallina bianca alla 1ª estrazione e alla 2ª , una pallina nera alla 3ª, una pallina bianca alla 4ª ed una nera alla 5ª, quindi si ottiene come prodotto delle probabilità dei singoli eventi enumerati.

Se l'urna contiene *i* palline bianche la probabilità dell'evento prodotto è la seguente:

Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_0= 0 palline bianche	$P(E/H_0) = \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-0}{4}\right) \cdot \left(\frac{0}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-0}{4}\right) = 0$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_1= 1pallina bianca	$P(E/H_1) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right) = 0{,}0088$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_2= 2 palline bianche	$P(E/H_2) = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right) = 0{,}0312$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_3= 3 palline bianche	$P(E/H_3) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{4}\right) = 0{,}0264$
Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi H_4= 4 palline bianche	$P(E/H_4) = \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-4}{4}\right) = 0$

A questo punto possiamo calcolare la probabilità dell'esperimento come somma delle probabilità condizionate per la probabilità di ogni ipotesi a priori, otteniamo 0,20.

$P(E) = P(E/H_0) \cdot P(H_0) + P(E/H_1) \cdot P(H_1) + P(E/H_2) \cdot P(H_2) + P(E/H_3) \cdot P(H_3) + P(E/H_4) \cdot P(H_4)$

$P(E) = 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}0088 \cdot 0{,}2 + 0{,}0312 \cdot 0{,}2 + 0{,}0264 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 = 0{,}0133$.

Ora, utilizzando il teorema di Bayes, si possono calcolare le probabilità a posteriori.

Probabilità ipotesi 0 palline bianche subordinata all'esperimento	$P(H_0/E) = \frac{0 \cdot 0{,}2}{0{,}0133} = 0$
Probabilità ipotesi 1 pallina bianca subordinata all'esperimento	$P(H_1/E) = \frac{0{,}0088 \cdot 0{,}2}{0{,}0133} = 0{,}1324$
Probabilità ipotesi 2 palline bianche subordinata all'esperimento	$P(H_2/E) = \frac{0{,}0312 \cdot 0{,}2}{0{,}0133} = 0{,}4706$
Probabilità ipotesi 3 palline bianche subordinata all'esperimento	$P(H_3/E) = \frac{0{,}0264 \cdot 0{,}2}{0{,}0133} = 0{,}3971$
Probabilità ipotesi 4 palline bianche subordinata all'esperimento	$P(H_4/E) = \frac{0 \cdot 0{,}2}{0{,}0133} = 0$

Sulla base di questa esperienza risulta quindi che le due composizioni più probabili sono quella con 2 o 3 palline rosse.

65 Ripetiamo l’esperimento assumendo le probabilità ottenute come nuove probabilità a priori ed effettuando ancora 5 estrazioni dal sacchetto. Supponiamo che la sequenza ottenuta sia: NNNNN. Quali sono questa volta le probabilità subordinate all'esperimento?

$$P(H_0/E)=0{,}723\ ;\ P(H_1/E)=0{,}229\ ;\ P(H_2/E)=0{,}045\ ;\ P(H_3/E)=0{,}003\ ;\ P(H_4/E)=0$$

66 Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F^+). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M^+). Si completi la seguente tabella

	Malato=M^+	Sano=M^-	Totale
Fumatore=F^+	18,7%		22%
Non Fumatore=F^-			78%
Totale			100%

Determinare la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore

R. $P(F^+/M^+)=55\%$

67 Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60% e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

A) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?
B) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la meta, con quale probabilità appartiene al gruppo dei non allenati? R. $P(A)=0{,}85\ ;\ P(B)=0{,}79$

68 Tra i villeggianti di una località di mare, il 75% trascorre le vacanze sempre nello stesso posto, il 25% solo saltuariamente. Il 60% dei villeggianti abitudinari possiede una casa e così il 10% dei villeggianti saltuari. Sapendo che un villeggiante scelto a caso possiede una casa, con che probabilità si tratta di un abitudinario? R. $P(A)=0{,}95$

69 Tre macchine, A B, C, producono rispettivamente il 60%, il 30%, e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.

A) Determinare la probabilità di estrarre un pezzo difettoso.
B) Se viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso, determinare la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina C. R. $P(A)=0{,}025\ ;\ P(B)=0{,}16$

►9. Esercizi dalle prove Invalsi

70 Se si lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che escano una testa e una croce? (Prove Invalsi 2005)

71 Qual è la probabilità che su 6 lanci di un comune dado a 6 facce non truccato si abbia per 6 volte il numero 3? (Prove Invalsi 2005)

72 Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Sena reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari? (Prove Invalsi 2005)

73 Se lanci un dado una sola volta, quale probabilità hai di ottenere un numero pari minore di 6? (Prove Invalsi 2006)

74 E' lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che escca una faccia il cui numero è multiplo di 3? (Prove Invalsi 2006)

75 Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: "esce una figura o un asso"? (Prove Invalsi 2006)

76 Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu? (Prove Invalsi 2006)

77 La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è 3/50. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna? (Prove Invalsi 2006)

78 Si lancia un comune dado a 6 facce non truccato per 8 volte. Qual è la probabilità che al terzo lancio esca il numero 5? (Prove Invalsi 2005)

79 Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, quale delle seguenti affermazioni è falsa? La probabilità di estrarre una pallina...

A. rossa o gialla è 0,5
B. verde è 0,1
C. blu o gialla è 0,7
D. rossa o blu è 0,4

(Prove Invalsi 2005)

80 Se i lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che esca almeno una testa? (Prove Invalsi 2006)

81 Un'urna contiene 20 palline: 4 bianche, 6 rosse e 10 verdi. Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa e la probabilità di estrarre una pallina rossa o verde? (Prove Invalsi 2006)

82 La probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna è 4/10. Quale delle seguenti affermazioni è compatibile con la precedente?

A. L'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 nere.
B. L'urna contiene 40 palline bianche, 40 rosse e 40 nere.
C. L'urna contiene 40 palline bianche e 100 rosse.
D. l'urna contiene 80 palline bianche, 50 rosse e 70 nere.

(Prove Invalsi 2006)

83 In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5? (Prove Invalsi 2006)

84 Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna ed osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una 21-esima pallina, qual è la probabilità che questa si nera? (Prove Invalsi 2007)

85 Quanto vale la probabilità che una persona risponda correttamente ad una domanda che prevede solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte? (Prove Invalsi 2007)

86 Un'urna contiene 21 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento "esce la lettera π"? (Prove Invalsi 2007)

87 In una lotteria i 4 premi sono assegnati per estrazioni successive, partendo dal 1° fino al 4°. Pietro ha acquistato uno solo dei 100 biglietti venduti. Egli è presente all'estrazione dei premi e l'estrazione del 1° premio lo vede perdente. Qual è la probabilità che Pietro vinca il 2° premio? (Prove Invalsi 2007)

88 Si lanciano due dadi ed escono due numeri il cui prodotto è 6. Qual è la probabilità che uno dei due numeri usciti sia 2? (Prove Invalsi 2007)

89 Quanti casi possibili si ottengono gettando un dado e una moneta contemporaneamente?
A. 12 B. 8 C. 36 D. 2 E. La risposta esatta non è tra quelle proposte.
(Prove Invalsi)

90 Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3?
A. Maggiore di 61, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4.
B. 61, perché il dado non si ricorda degli eventi passati.
C. Minore di 61, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri.
D. 21, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro).
E. Le informazioni date non consentono di rispondere.
(Prove Invalsi 2003)

91 Estrarre da un mazzo di carte francesi (52 carte) una carta di seme nero e figura è…
A. più probabile che estrarre una carta di seme nero.
B. più probabile che estrarre una figura di qualunque seme.
C. meno probabile che estrarre una carta di seme nero e asso.
D. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme nero o figura.
E. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme rosso e figura.
(Prove Invalsi 2003)

92 La probabilità di estrarre un 6 o un 8 da un mazzo di carte napoletane (40 carte) è… (Prove Invalsi 2003)

93 Aldo e Luigi giocano a testa o croce, ciascuno di essi lancia due monete. Qual è la probabilità che il numero di teste di Luigi sia uguale a quelle ottenute da Aldo? (Prove Invalsi 2003)

94 Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità 1/2 di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa?
A. Maggiore di 1/2
B. Uguale a ½
C. Minore di ½
D. Le informazioni date non consentono di rispondere.
(Prove Invalsi 2004)

95 Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35? (Prove Invalsi 2004)

96 Qual è la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari o multiplo di 3? (Prove Invalsi 2004)

Autori

Claudio Carboncini: teoria, esercizi
Alessandra Marrata: teoria, esercizi
Mauro Paladini: teoria, esercizi
Anna Cristina Mocchetti: teoria
Antonio Bernardo: teoria, esercizi
Lucia Rapella: correzioni
Francesca Lorenzoni: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 14.07.2012