MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

6. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI

Sails by Cseward
http://www.flickr.com/photos/cseward/2823465045

Indice

►1. Valore assoluto

Il valore assoluto o modulo di un numero a, indicato con $|a|$, è lo stesso numero se a è maggiore o uguale a zero, il suo opposto, cioè $-a$, se a è minore di zero. In sintesi scriviamo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio $|+7| = 7$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|0| = 0$; $|-1| = 1$; $|1| = 1$.
Nello stesso modo definiamo il valore assoluto di una espressione algebrica.
Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $E = x^2 - 3x$, indicato con $|x^2 - 3x|$, è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio, precisamente: $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$;
risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geq 0$ si esplicitano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche. Otteniamo dunque $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$

In generale, la funzione valore assoluto di un'espressione algebrica, detta **argomento del valore assoluto**, viene esplicitata nei due casi generati dallo studio del segno dell'argomento:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

■ Per la funzione $f(x) = |\sqrt{3} + 3x|$ trovare le espressioni algebriche che descrivono i due casi, ciascuno con il suo dominio.

Strategia risolutiva. Per la definizione si ha:

$$f(x) = |\sqrt{3} + 3x| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x & \text{se } \sqrt{3} + 3x \geq 0 \rightarrow x \geq \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \text{se } \sqrt{3} + 3x < 0 \rightarrow x < \dots\dots \end{cases}$$

■ Descrivere per casi, eliminando i valori assoluti, la funzione $f(x) = |x^2 - 4| + |x + 1| - 2x$

Dobbiamo studiare i segni dei due binomi in valore assoluto

$x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

$x + 1 \geq 0 \rightarrow x > -1$

		-2		-1		2	
$x^2 - 4 \geq 0$	+ + + + +		- - - -		- - - - - - -		+ + + +
$x + 1 \geq 0$	- - - - - - -		- - - -		+ + + + +		+ + + + +

La situazione è rappresentata con maggiore chiarezza nel grafico.
Nell'intervallo $x < -2$ il primo argomento di valore assoluto è positivo e il secondo è negativo.
Nell'intervallo $-2 \leq x < -1$ tutti e due gli argomenti di valore assoluto sono negativi.
Nell'intervallo $-1 \leq x < 2$ il primo argomento di valore assoluto è positivo, il secondo è negativo
Nell'intervallo $x \geq 2$ entrambi gli argomenti sono positivi.

In sintesi $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4) - (x + 1) - 2 & \text{se } x < -2 \\ -(x^2 - 4) - (x + 1) - 2x & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ -(x^2 - 4) + (x + 1) - 2x & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ +(x^2 - 4) + (x + 1) - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Scrivi l'espressione algebrica che descrive i due casi della funzione, ciascuno con il suo dominio

1 $f(x) = |-2x + 5|$ $\quad f(x) = |x - 1|$ $\quad f(x) = |-x|$

2 $f(x) = |-x^2 + 4|$ $\quad f(x) = |x^2 + 1|$ $\quad f(x) = |x^2 - 3x + 1|$

3 $f(a) = |2a - 2|$ $\quad f(p) = \left|3p^2 - \frac{1}{2}\right|$ $\quad f(a) = |-2a^2 - 1|$

4 $f(x) = \left|\frac{1}{x - 1}\right|$ $\quad f(x) = \left|\frac{2x}{x - 2}\right|$ $\quad f(x) = \left|\frac{x + 1}{2x - 1}\right|$

5 $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ $\quad f(x) = |3x - 2| - |7x + 1|$ $\quad f(x) = -|x + 2| + |x - 2| - x$

6 $f(x) = |x^2 + 1| - |x^2 - 1|$ $\quad f(x) = \left|\frac{1}{x}\right| - |x|$ $\quad f(x) = \left|\frac{x + 2}{x - 1}\right| + |x^2 + 4x + 3| + 1$

►2. Equazioni in una incognita in valore assoluto

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k\geq 0$

L'incognita è presente solo all'interno del modulo.

Esempi

■ $|x^2-7|=3$

Ricordiamo che $|x^2-7|=x^2-7$ se $x^2-7\geq 0$ mentre $|x^2-7|=-x^2+7$ se $x^2-7<0$.

Pertanto l'equazione diventa $x^2-7=3$ se $x^2-7\geq 0$ e $-x^2+7=3$ se $x^2-7<0$. Il tutto si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases} x^2-7\geq 0 \\ x^2-7=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-7<0 \\ -x^2+7=3 \end{cases}$.

Moltiplicando per -1 l'equazione del secondo sistema otteniamo $\begin{cases} x^2-7\geq 0 \\ x^2-7=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-7<0 \\ x^2-7=-3 \end{cases}$.

Si vede abbastanza facilmente che sia nel primo che nel secondo sistema le due disequazioni sono sempre verificate. Infatti, nel primo sistema l'equazione $x^2-7=3$ verifica automaticamente la disequazione $x^2-7\geq 0$ in quanto è richiesto che x^2-7 sia uguale a 3, pertanto è necessariamente positivo. Stesso ragionamento vale per il secondo sistema. In altre parole, per risolvere la disequazione data è sufficiente risolvere le due equazioni $(x^2-7=3)\vee(x^2-7=-3)$ unendone le soluzioni.

$x^2-7=3 \rightarrow x^2=10 \rightarrow x_1=-\sqrt{10} \vee x_2=\sqrt{10}$

$x^2-7=-3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_3=-2 \vee x_4=2$

. Le soluzioni sono quindi: $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2, +2\}$

■ $|x^2-x|=1$

L'equazione $|x^2-x|=1$ si risolve unendo gli insiemi soluzione delle equazioni $x^2-x=1$ e $x^2-x=-1$.

$x^2-x=1 \rightarrow x^2-x-1=0 \rightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. L'Insieme Soluzione è $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

$x^2-x=-1 \rightarrow x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow \emptyset$

Procedura risolutiva. Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)|=k$ con $k\in\mathbb{R}\wedge k\geq 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $f(x)=\pm k$.

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k<0$

Se $k<0$ l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)|=k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione dà un valore sempre positivo.

■ $|x-7|=-1$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale presentato prima.

$\begin{cases} x-7\geq 0 \\ x-7=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-7<0 \\ x-7=1 \end{cases}$ Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è impossibile.

Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto

7 $|x-2x^2|=1$ R. $x_1=1; x_2=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $|-x^2-4|=9$ R. $x_1=\sqrt{5}; x_2=-\sqrt{5}$

8 $|x^2-x|=-3$ R. $\emptyset$ $\qquad$ $|x^2+1|=0$ R. $\emptyset$

9 $|2x+1|=2$ R. $x_1=-\dfrac{3}{2}; x_2=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $|x^2-3x+1|=1$ R. 0; 1; 2; 3

10 $|x^2+1|=3$ R. $\pm\sqrt{2}$ $\qquad$ $|x^2-1|=3$ R. -2; +2

11 $|x^2-7|=3$ R. $\pm\sqrt{10}; \pm 2$ $\qquad$ $6|x^2-1|=0$ R. -1; +1

12 $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x^2}\right|=-1$ R. $\emptyset$ $\qquad$ $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x^2}\right|=1$ R. $\dfrac{\pm\sqrt{3}}{2}$

13 $\dfrac{5}{|x^2-1|}=1$ R. $\pm\sqrt{6}$ $\qquad$ $\left|\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+3x-1}\right|=1$ R. $0; \dfrac{2}{3}; -4\pm 3\sqrt{2}$

14 $4|x^2-x|=1$ R. $\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}$

Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

- $|-1+3x|=7x+4$.

Osserviamo che il primo membro dell'equazione presenta un valore assoluto.

Esplicito i due casi dell'argomento $|-1+3x|=\begin{cases}-1+3x & \text{se } -1+3x\geq 0 \rightarrow x\geq\frac{1}{3}\\ 1-3x & \text{se } -1+3x<0 \rightarrow x<\frac{1}{3}\end{cases}$

Modifico l'equazione tenendo conto dei casi: $A]\begin{cases}x\geq\frac{1}{3}\\ -1+3x=7x+4\end{cases}$ $B]\begin{cases}x<\frac{1}{3}\\ 1-3x=7x+4\end{cases}$

Risolvo i due sistemi $A]\begin{cases}x\geq\frac{1}{3}\\ 4x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{4}\end{cases}$ $B]\begin{cases}x<\frac{1}{3}\\ 10x=3 \rightarrow x=\frac{3}{10}\end{cases}$

Unisco le soluzioni, tenendo conto che nel primo sistema la soluzione -5/4 non è accettabile in quanto non è maggiore di 1/3. Pertanto: $I.S._A \cup I.S._B=\emptyset\cup\left\{\frac{3}{10}\right\}=\left\{\frac{3}{10}\right\} \rightarrow x=\frac{3}{10}$

- $|-2x+5|=x-3$

Esplicito i due casi dell'argomento $|-2x+5|=\begin{cases}-2x+5 & \text{se } -2x+5\geq 0 \rightarrow x\leq\frac{5}{2}\\ 2x-5 & \text{se } -2x+5<0 \rightarrow x>\frac{5}{2}\end{cases}$

Riscrivo l'equazione assegnata in forma di due sistemi $A]\begin{cases}x\leq\frac{5}{2}\\ -2x+5=x-3\end{cases}$ $B]\begin{cases}x>\frac{5}{2}\\ 2x-5=x-3\end{cases}$

Risolvo ciascun sistema $A]\begin{cases}x\leq\frac{5}{2}\\ -3x=-8 \rightarrow x=\frac{8}{3}\end{cases}$ $B]\begin{cases}x>\frac{5}{2}\\ x=2\end{cases}$ quindi $I.S._A=\emptyset;\ I.S._B=\emptyset$

Unisco i due insiemi soluzione $I.S._A \cup I.S._B=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$: l'equazione impossibile.

- $|2x-1|=x+2$

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 2x-1=x+2\end{cases}\cup\begin{cases}2x-1<0\\ -2x+1=x+2\end{cases}$

da cui $\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ x=3\end{cases}\cup\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ le soluzioni sono $x=3\vee x=-\frac{1}{2}$.

Procedura risolutiva

Per risolvere un'equazione in cui l'incognita compare sia nel modulo sia fuori dal modulo, si pongono le condizioni iniziali sull'espressione che è all'interno del modulo e si vanno a risolvere due sistemi uniti dal connettivo logico "o".

Nel primo sistema vi sarà la condizione $\boldsymbol{f(x)\geq 0}$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo.

Nel secondo sistema vi sarà la condizione $\boldsymbol{f(x)<0}$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo e cambiando il segno a tutto ciò che vi era all'interno.

Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni con valore assoluto definite in $\mathbb{R}$

15	$\|x-1\|=x$	R. $x=\frac{1}{2}$
16	$\|x^2-4\|=3x-1$	R. $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2}; x_2=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$
17	$\|2-x\|=4-x^2$	R. $x_1=2; x_2=-1$
18	$\|x^2+2\|=1-x^2$	R. $\emptyset$
19	$\|-x^2+2x-3\|=x+1$	R. $x_1=2; x_2=1$
20	$\|-x^2+4x-7\|=3-2x$	R. $\emptyset$
21	$\|2-4x\|=4(x-1)(x+2)$	R. $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}; x_2=-\frac{2+\sqrt{14}}{2}$
22	$\|x^2-4x+3\|=4x-6$	R. $x_1=\sqrt{3}; x_2=4+\sqrt{7}$
23	$\|1-2x\|=5x-7$	R. $x=2$
24	$\|x^3-x^2\|=x-1$	R. $x=1$
25	$\|x^2-3x+2\|=x+1$	R. $x_1=2+\sqrt{3}; x_2=2-\sqrt{3}$
26	$\|x^2+1\|=3+x$	R. $x_1=2; x_2=-1$
27	$\|-x^2-4x-8\|=3x-2-x^2$	R. $\emptyset$
28	$\|2x^2-3x\|=-x$	R. 0
29	$\|x^3-4x^2\|=1-4x$	R. $x_1=-1; x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$
30	$\|x^4-3x^2\|=x^2-2$	R. $\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}; \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$
31	$\|x^4-5x^2\|=5-x^2$	R. $x_1=1; x_2=-1; x_3=\sqrt{5}; x_4=-\sqrt{5}$
32	$\|9-x^2\|=x^2-3x+4$	R. $x_1=-1; x_2=\frac{13}{3}; x_3=\frac{5}{2}$
33	$\|x^2-2x-5\|=4-\frac{1}{4}x^2$	R. $x_1=\frac{18}{5}; x_2=-2; x_3=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$
34	$\|x^2-3x+2\|=2x-4$	R. $x_1=2; x_2=3$
35	$\|x+5\|=x^2-1$	R. $x_1=-2; x_2=3$
36	$\|2x-6\|=7-2x^2$	R. $x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}; x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
37	$\|x^2-4\|=x+8$	R. $[x_1=-3; x_2=4]$
38	$\|x^2+1\|=5-x$	R. $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
39	$\|x^4-x^2\|=x^2+8$	R. $[x_1=-2; x_2=2]$
40	$\|x^4-9\|=x^2$	R. $\frac{\pm\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2}; \pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}$
41	$\|1-x^2\|=4x^2+x$	R. $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{10}; x_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{10}$
42	$\|x^2-3x+2\|=2x-4$	R. $\emptyset$
43	$\|x^2-3x+2\|=2x-4$	R. $x_1=2; x_2=3$
44	$\|x^2-1\|=x^2-1$	R. $x\leq-1 \vee x\geq1$
45	$\|x^2-5x+6\|=3x^2-x$	R. $x_1=-3; x_2=1$
46	$\|x^2-3\|=x^2-6x+9$	R. $x=2$
47	$\|1-3x\|=\frac{(x-3)^2}{1-2x}$	R. $x=-\frac{\sqrt{161}+1}{10}$
48	$\left\|\frac{1-3x}{1-2x}\right\|=\frac{x^2-3x+2}{1-2x}$	R. impossibile

►3. Equazioni con più espressioni in valore assoluto

■ $|2x-3|-|1-2x|=4$

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna di esse sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno quattro casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento possiamo procedere studiando il segno di ciascun argomento e confrontarli servendoci del seguente schema:

		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
segno di $2x-3$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$
segno di $1-2x$	$+$	$\bullet$	$-$		$-$

I casi che si presentano possono essere esaminati nei tre sistemi:

$$A.\begin{cases} x\le\frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \end{cases} \quad B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases} \quad C.\begin{cases} x\ge\frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases}$$

Dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo

$$A.\begin{cases} x\le\frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \rightarrow x=2 \end{cases} \rightarrow I.S._A=\emptyset \quad \left(2 \text{ non è minore di } \frac{1}{2}\right)$$

$$B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \rightarrow x=0 \end{cases} \rightarrow I.S._B=\emptyset \quad \text{(0 non appartiene all'intervallo considerato)}$$

$$C.\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \rightarrow x=6 \end{cases} \rightarrow I.S._C=\{6\} \quad \text{soluzione accettabile}$$

Conclusione: $I.S.=I.S._A\cup I.S._B\cup I.S._C=\{6\}$

■ $|x^2-4|-3x=|x-1|$

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:

		-2		1		2	
segno di x^2-4	$+$	$\bullet$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$
segno di $x-1$	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$

In questo caso dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

$$A.\begin{cases} x\le-2 \\ x^2-4-3x=-x+1 \rightarrow x^2-2x-5=0 \rightarrow x_1=1-\sqrt{6}\vee x_2=1+\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow I.S._A=\emptyset$$

$$B.\begin{cases} -2<x<1 \\ -x^2+4-3x=-x+1 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x_1=-3\vee x_2=1 \end{cases} \rightarrow I.S._B=\emptyset$$

$$C.\begin{cases} 1\le x<2 \\ -x^2+4-3x=x-1 \rightarrow x^2+4x-5=0 \rightarrow x_1=-5\vee x_2=1 \end{cases} \rightarrow I.S._C=\{1\}$$

$$D.\begin{cases} x\ge2 \\ x^2-4-3x=x-1 \rightarrow x^2-4x-3=0 \rightarrow x_1=2-\sqrt{7}\vee x_2=2+\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow I.S._D=\{2+\sqrt{7}\}$$

Conclusione: $i.S.=I.S._A\cup I.S._B\cup I.S._C\cup I.S._D=\{1\,;\,2+\sqrt{7}\}$

Procedura per risolvere una equazione con la presenza di uno o più valori assoluti

Si possono verificare tre casi:

1. L'incognita è presente solo nell'argomento del modulo: $|f(x)|=k$, l'equazione si risolve ponendo: $f(x)=\pm k$
   - Se $k<0$ l'equazione è impossibile
2. L'incognita si trova anche al di fuori del modulo; in questo caso si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione dei due sistemi.
3. Se è presente più di un modulo, si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'Insieme Soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione di ogni sistema.

Risolvi le seguenti equazioni con due valori assoluti

49 $|x-2|+|5-2x|=x-1$ R. $x_1=2\,;x_2=3$

50 $|x^2-4x+3|=1-2|4-x^2|$ R. $x=2$

51 $|x-1|=x^2-x+|3-x^2|$ R. $\emptyset$

52 $|3x-2|=x^2-|x^2-x|+3$ R. $x_1=\frac{5}{2}\,;x_2=-\frac{1}{4}$

53 $|3x-x^2-2|=\frac{1}{2}+x^2-x-2|1-x^2|$ R. $x_1=\frac{9}{8}\,;x_2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

54 $|2x-5|+|x^2-1|=x-2$ R. $\emptyset$

55 $|x-2|=|x^2-4|$ R. $x_1=-3\,;x_2=-1\,;x_3=2$

56 $|x-2|=|x^2-4|+1$ R. $x_1=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\,;x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

57 $|x-2|=|x^2-4|+4$ R. $x=-2$

58 $|x-2|=|x^2-4|+5$ R. $\emptyset$

59 $|x^2-3x|=x|x|$ R. $x_1=0\,;x_2=\frac{3}{2}$

60 $|x-1|(x+1)=|2x-4|$ R. $x=\sqrt{6}-1$

61 $|x^2-5x+6|=(3-x)|x^2+x-2|$ R. $x_1=0\,;x_2=3\,;x_{3,4}=-1\pm\sqrt{5}$

62 $|x|^2-|x|=2$ R. $x_1=2\,;x_2=-2$

63 $|x|^2+3|x|+2=0$ R. $\emptyset$

64 $|x|^2-5|x|+6=0$ R. $x_1=2\,;x_2=-2\,;x_3=3\,;x_4=-3$

65 $|4x-x^2|-2x=2|x^2-9|$ R. $x_1=-3-3\sqrt{3}\,;x_2=1-\sqrt{7}$

66 $(x-1)^2|x|=x^2-1$ R. $x_1=1\,;x_2=1+\sqrt{2}$

67 $|x|=3x-|x^2-1|$ R. $x_1=\sqrt{2}-1\,;x_2=\sqrt{2}+1$

68 $|x-2|+|x|=1+x^2$ R. $x_1=1\,;x_2=-1-\sqrt{2}$

69 $|3x-6|+|4x-x^2|=x+3$ R. $x_1=3\,;x_2=\sqrt{3}\,;x_3=1+\sqrt{10}$

70 $|x^2-4|+1-2x=2x^2+|x+2|$ R. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

71 $x+|x^2+x-6|=\frac{1}{4}(x^2+10x+25)$ R. $x_{1,2}=\frac{-5\pm2\sqrt{5}}{5}\,;x_{3,4}=\frac{1\pm2\sqrt{37}}{3}$

72 $x+2|-x-1|=x^2-|x|$ R. $x_1=1-\sqrt{3}\,;x_2=2+\sqrt{6}$

73 $|x^3-4x|=|x|$ R. $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}\,;x_{3,4}=\pm\sqrt{3}\,;x=0$

74 $|x-2|=|x^2-4|-4$ R. $x_1=3\,;x_2=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

75 $|x-2|=|x^2-4|-\frac{9}{4}$ R. $x_1=\frac{1}{2}\,;x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}\,;x_3=-\frac{1+\sqrt{34}}{2}$

76 $|x^2-4x|=|2x^2-3|$ R. $-2\pm\sqrt{7};\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

77 $|x-1|^2-|x^2-1|=1$ R. $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

78 $|9-4x^2|=x^2+2|x-3|$ R. $x_1=1;x=-\frac{3}{5};x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{46}}{3}$

79 $(|x-1|-|3x-3|)^2=0$ R. $x=1$

80 $(|x|-2|17-x^2|)^3=8$ R. $x_1=\pm4;x_3=\frac{\pm1+\sqrt{257}}{4}$

81 $(|2x-1|-1)(6-2|x^2-9|)=0$ R. $x_1=0;x_2=1;x_{3,4}=\pm\sqrt{6};x_{5,6}=\pm2\sqrt{3}$

82 $|x-2|(1-|x-1|)=\frac{1}{4}$ R. $x_1=\frac{3}{2};x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

83 $\frac{|x-1|+3|4x+x^2+3|}{2}=2$ R. $x_1=-3;x_2=-\frac{4}{3};x_3=-\frac{2}{3}$

84 $|x-1|-|x+1|=1$ R. $x=-\frac{1}{2}$

85 $|4x^2-4|-2|x+1|=0$ R. $x_1=-1;x_2=\frac{1}{2};x_3=\frac{3}{2}$

86 $|x-4|=|(x-1)^2-1|$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2};x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

87 $(|x-1|-|3x-6|)^2=0$ R. $x_1=\frac{5}{2};x_2=\frac{7}{4}$

88 $\left|3x^2-\frac{1}{2}\right|-x=|x-1|$ R. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2};x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

89 $(x-1)|4-2x|=x^2-2$ R. $x_1=3+\sqrt{3};x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3};x_3=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

90 $(x-1)|4-2x|=x^2-1$ R. $x_1=1;x_2=5$

91 $(x-1)|4-2x|=x^2+1$ R. $x=3+\sqrt{6}$

92 $x^2|2x+2|=4|x|$ R. $x_1=-2;x_2=0;x_3=1$

93 $|x-2|-|1-x|=(x-1)^2$ R. $x_1=0;x_2=\sqrt{2}$

94 $2|x^2-9|+6|4x+12|=0$ R. $x=-3$

95 $|x-2|+|x|=1-x^2$ R. $\emptyset$

96 $|x-2|=|x^2-4|-2$ R. $0;1;\frac{1+\sqrt{17}}{2};-\frac{1+\sqrt{33}}{2}$

97 $|5x-x^2|=3+2x-|x|$ R. $1;3;2\sqrt{3}+3;4-\sqrt{19}$

98 $2|4-x^2|=|x^2-2x+3|$ R. $-1;\frac{5}{3};-1+2\sqrt{3};-1-2\sqrt{3}$

99 $|3-3x|+x=8-2|16-4x^2|$ R. $\frac{-1+\sqrt{87}}{4};\frac{1+\sqrt{43}}{4};\frac{1-3\sqrt{33}}{8};\frac{-1-\sqrt{217}}{8}$

100 $|x-1|=\frac{2}{x+1}-1$ R. $0;1;\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

101 $|x^2-x|+3x=|x-1|-|2x+1|$ R. 0; -2

102 $|x^2-5x+6|+3x+2=|x^2-1|-|x+1|$ R. 10

103 $(|x-3|+1)^2=|x^2+1|-3|x|-|-5|$ R. 8

►4. Disequazioni con valori assoluti

Le disequazioni con i moduli si risolvono in modo analogo alle equazioni con moduli.

Caso in cui l'incognita si trova anche fuori dal modulo

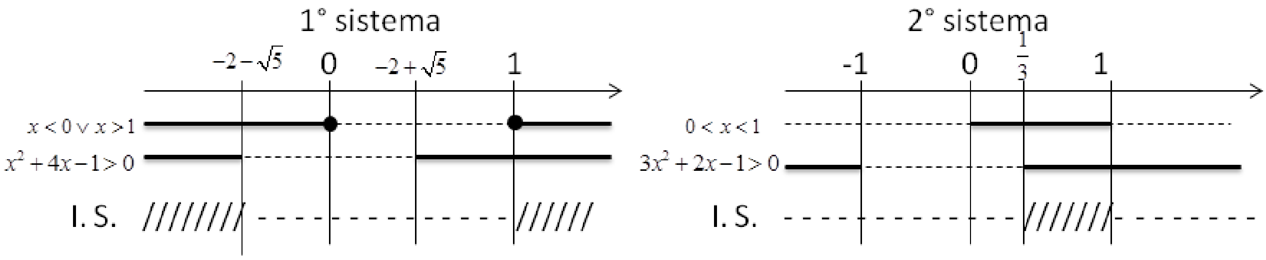
- $|x^2-x|<2x^2+3x-1$

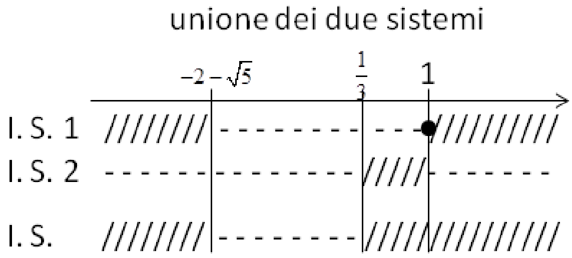
Studiamo il segno dell'argomento del modulo $x^2-x\ge 0 \rightarrow x(x-1)\ge 0 \rightarrow x<0\vee x>1$

La disequazione assegnata si sdoppia nell'unione di due sistemi

$\begin{cases} x\le 0\vee x\ge 1 \\ x^2-x<2x^2+3x-1\end{cases} \cup \begin{cases} 0<x<1 \\ -x^2+x<2x^2+3x-1\end{cases}$ Semplificando le disequazioni si ha

$$\begin{cases} x<0\vee x>1 \\ x^2+4x-1>0\end{cases} \cup \begin{cases} 0<x<1 \\ 3x^2+2x-1>0\end{cases}$$





L'insieme soluzione è $x<-2-\sqrt{5}\vee x>\frac{1}{3}$

Caso in cui l'incognita si trova solo nel modulo

Le disequazioni della forma $|f(x)|<k$ si trasformano sempre nella disequazione $-k<f(x)<k$

- $|x^2-1|<3$

La disequazione diventa $-3<x^2-1<3$ oppure $\begin{cases} x^2-1<3 \\ x^2-1>-3\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2<4 \\ x^2>-2\end{cases}$.

La prima disequazione $x^2<4$ è verificata per $-2<x<2$.

La seconda è sempre verificata perché il quadrato x^2 è sempre maggiore di un numero negativo.

L'I.S. Della disequazione assegnata è quindi $-2<x<2$.

Le disequazioni della forma $|f(x)|>k$ si trasformano nella forma $f(x)<-k\vee f(x)>k$

- $|x^2-4|>4$

L'equazione diventa $x^2-4<-4\vee x^2-4>4$, spostando il -4 al secondo membro $x^2<0\vee x^2>8$.

La prima disequazione $x^2<0$ non ha soluzioni in quanto il quadrato x^2 non può essere minore di 0.

La seconda ha per soluzioni $x<-2\sqrt{2}\vee x>2\sqrt{2}$.

Risolvi le seguenti disequazioni con valori assoluti

104 $|x+1|<1$ R. -2<x<0

105 $|x^2-3x+3|<3$ R. 0<x<3

106 $|3x^2-1|>6$ R. $x<-\frac{\sqrt{21}}{3} \vee x>\frac{\sqrt{21}}{3}$

107 $5-|5-x^2|\geq 6$ R. impossibile

108 $|9-16x^2|>0$ R. $x\neq\pm\frac{3}{4}$

109 $|x^2+6x|>2$ R. $x<-3-\sqrt{11} \vee -3-\sqrt{7}<x<-3+\sqrt{7} \vee x>-3+\sqrt{11}$

110 $|5x-x^2|>6$ R. $x<-1 \vee 2<x<3 \vee x>6$

111 $\left|\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right|-\frac{1}{2}>2$ R. $-\frac{12}{17}<x<\frac{12}{13} \wedge x\neq 0$

112 $|x^2-3|\geq|-4|$ R. $x\leq-\frac{\sqrt{14}}{2} \vee x\geq\frac{\sqrt{14}}{2}$

113 $2x^2-7x+3>|x^2-2x|$ R. $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{\sqrt{13}+5}{2}$

114 $\left|\frac{x}{x-1}\right|>1$ R. $x>\frac{1}{2} \wedge x\neq 1$

115 $|x^2+3|<|5-2x|$ R. $-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$

116 $|x^2-1|+3x\geq 2\left(x+|x^2-1|\right)$ R. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

117 $|x-2|+2|2-x|>(x-2)(x+2)$ R. -5<x<2

118 $(x-3)^2-|(x^2-4)|<10+(x+1)(x-1)-6x$ R. $x\neq-2 \wedge x\neq 2$

119 $\frac{|x|}{x-1}<\frac{x+1}{|x|}$ R. x<1

120 $\left|\frac{3x+2}{2x}\right|\leq 1$ R. $-2\leq x\leq-\frac{2}{5}$

121 $|x-1|>|2x-1|$ R. $0<x<\frac{2}{3}$

122 $|(x^2-4)|<|(x^2-2x)|$ R. x<-1

123 $|x+1|<|x|-x$ R. $x<-\frac{1}{3}$

124 $|x-1|+3x-|3-x|+1<0$ R. x<1/3

125 $|x-1|\geq 4-|2x-3|$ R. $x\leq 0 \vee x\geq\frac{8}{3}$

126 $1-|4x^2-1|+5x<|x^2-9|+3x^2$ R. $\forall x$

127 $|x^2-x|-2\leq|x-2|$ R. $-2\leq x\leq 2$

128 $\frac{|x-3|-x^2}{|x-1|}\leq 1-|x-1|$ R. $x\leq\frac{5}{4}$

129 $(x-1)^2-|x-3|<|x+5|(x-5)+2x$ R. $x>\frac{29}{5}$

130 $\begin{cases}|2x-3|<6\\|x^2-2x|>3\end{cases}$ R. $-\frac{3}{2}<x<-1 \vee 3<x<\frac{9}{2}$

131 $\frac{|x^2-1|-5}{|x-1|(x^2-x-6)}\geq 0$ R. $(x\leq-\sqrt{6} \vee -2<x\leq\sqrt{6} \vee x>3) \wedge x\neq\pm 1$

►5. Equazioni irrazionali con un solo radicale

DEFINIZIONE. Un'equazione si dice irrazionale quando l'incognita compare sotto il segno di radice.

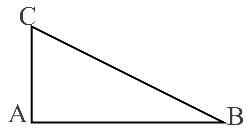
Analizziamo le seguenti equazioni: $[A]\sqrt{3}\cdot x=x^2-x+2$, $[B]\sqrt{2x}=x^2-x$.

Notiamo che l'equazione [A] è di secondo grado, intera con un coefficiente irrazionale (sotto il segno di radice), ma non è un'equazione irrazionale perché l'incognita non compare sotto la radice.

Nell'equazione [B] il monomio 2x, contenente l'incognita, compare sotto il segno di radice pertanto essa è un'equazione irrazionale.

Problema

Determinate l'area di un triangolo rettangolo ABC retto in A avente perimetro di 24cm e i cateti che differiscono di 2cm.



Dati: $2p=24$; $\overline{AB}-\overline{AC}=2$ Obiettivo: ? Area

Strategia risolutiva: $Area=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$; dobbiamo quindi determinare i cateti.

Poniamo $\overline{AC}=x$ con $x>0 \rightarrow \overline{AB}=2+x$ e sfruttiamo l'informazione relativa al perimetro per determinare l'equazione risolvente $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=24$. Applicando il teorema di Pitagora si ha $\overline{BC}=\sqrt{x^2+(2+x)^2}=\sqrt{2x^2+4x+4}$ e dunque otteniamo l'equazione risolvente $2x+2+\sqrt{2x^2+4x+4}=24$ in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

Caso della radice di indice pari

Ricordiamo che l'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ con n pari non nullo ha significato per tutti i valori di x che rendono non negativo il radicando, pertanto l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale in cui compare uno o più radicali di indice pari sarà un sottoinsieme del Dominio o Insieme di Definizione del radicale (condizione di realtà del radicale).

Riprendendo l'equazione $\sqrt{2x}=x^2-x$ si avrà $D=I.D.=R^+\cup\{0\} \rightarrow I.S.\subseteq D$; nessun numero negativo potrà essere soluzione dell'equazione. L'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ nel suo I.D. è positiva o nulla (per definizione), pertanto l'equazione $\sqrt{2x}=x^2-x$ potrà verificarsi solo se il secondo membro sarà non negativo (condizione di concordanza del segno).

Quando abbiamo un'equazione nella quale l'incognita compare sotto una radice di indice n pari possiamo elevare alla potenza n entrambi i membri dell'equazione e la radice va via. Tuttavia, l'equazione ottenuta non sempre è equivalente a quella data, ossia non sempre ha le stesse soluzioni dell'equazione data.

Esempio

■ $\sqrt{x+2}=x$

1° metodo

Elevando al quadrato di ha $x+2=x^2$ da cui $x^2-x-2=0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo le soluzioni $x_1=-1$; $x_2=2$. Tuttavia, sostituendo questi valori di x nell'equazione irrazionale di partenza si ha:

per $x=-1 \rightarrow \sqrt{-1+2}=-1 \rightarrow \sqrt{1}=-1$ che è falsa, pertanto x=-1 non può essere soluzione;

per $x=2 \rightarrow \sqrt{2+2}=2 \rightarrow \sqrt{4}=2$ che è vera, pertanto x=2 è l'unica soluzione.

Per risolvere un'equazione irrazionale con indice pari possiamo allora elevare alla potenza pari della radice i due membri dell'equazione, risolvere l'equazione che si ottiene e verificare se le soluzioni sono accettabili.

Possiamo però procedere in un altro modo.

2° metodo

L'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ con n pari non nullo sarà un sottoinsieme dell'insieme, chiamiamolo H, in cui sono contemporaneamente vere le condizioni $f(x)\geq 0 \wedge g(x)\geq 0$ ossia l'insieme H soluzione del sistema $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$. In simboli: $I.S.\subseteq H$.

Esempi

- $\sqrt{x+2}=x$

La soluzione si ottiene risolvendo $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2=x^2 \end{cases}$ le disequazioni danno come condizione $x\geq 0$. Le soluzioni dell'equazione $x^2-x-2=0$ sono $x_1=-1\,;\ x_2=2$, l'unica da accettare è x=2.

- $\sqrt{5-2x}=x-1$

Elevo ambo i membri al quadrato, ottengo $5-2x=x^2-2x+1 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

Sostituisco x=-2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=-2-1 \rightarrow \sqrt{9}=-3$ falso, quindi x=-2 non è una soluzione accettabile.

Sostituisco x=+2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot 2}=2-1 \rightarrow \sqrt{1}=1$ vero, quindi x=+2 è una soluzione.

Ponendo le condizioni $\begin{cases} 5-2x\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x\leq \frac{5}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \rightarrow 1\leq x\leq \frac{5}{2}$ Pertanto la soluzione x=-2 non è accettabile in quando non è compresa tra 1 e 5/2, la soluzione x=+2 è invece accettabile.

Caso dell'indice della radice dispari

L'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è definita per tutti i valori reali per cui è definito il radicando, quindi l'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ si risolve elevando ad n entrambi i membri dell'equazione: $f(x)=g^n(x)$

Esempi

- $\sqrt[3]{x-2}=\frac{1}{2}$

Elevando al cubo si ha $x-2=\frac{1}{8} \rightarrow x=2+\frac{1}{8} \rightarrow x=\frac{17}{8}$

- $\sqrt[3]{-3x^2+3x+1}=x$

Elevando al cubo si ha $-3x^2+3x+1=x^3 \rightarrow (x-1)^3=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

- $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+3}}=\frac{2-5x}{4}$

Il dominio del radicando è l'insieme $H=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x\neq -\frac{3}{2}\right\}$ e dunque $I.S.\subseteq H$. Per risolvere l'equazione si eleva primo e secondo membro al cubo, si ottiene l'equazione $\frac{x}{2x+3}=\left(\frac{2-5x}{4}\right)^3$, la cui risoluzione richiede la risoluzione di un'equazione di quarto grado.

- $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\frac{4x+x^2}{3-x}$

Si ha che $I.S.\subseteq H$ dove H è $H=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\wedge x\neq 3\}$ in cui esistono reali entrambi i membri dell'equazione. Elevando al cubo si ottiene l'equazione risolvente che non svolgeremo.

- $\sqrt{2x}=x^2-x$

Determiniamo l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione;

$I.S.\subseteq H$ con $H=\begin{cases} 2x\geq 0 \\ x^2-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} \mid x=0\vee x\geq 1\}$

Rendiamo razionale l'equazione elevando ambo i membri all'esponente uguale all'indice della radice, quindi otteniamo $\left(\sqrt{2x}\right)^2=\left(x^2-x\right)^2 \rightarrow 2x=x^4-2x^3+x^2$

Risolviamo l'equazione ottenuta $x^4-2x^3+x^2-2x=0 \rightarrow x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x-2)=0 \rightarrow x=0\vee x=2$

confrontiamo le soluzioni con H e in questo caso possiamo affermare che l'insieme soluzione dell'equazione razionale è anche l'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale assegnata $I.S.=\{0\,;\,2\}$

Risolvi le seguenti equazioni:

132 $\sqrt{2x+1}=7$ R. 24 — $\sqrt{4-x^2}=1$ R. $\pm\sqrt{3}$

133 $\sqrt[4]{2x+1}=2$ R. $\frac{15}{2}$ — $\sqrt[3]{2x+1}=-2$ R. $-\frac{9}{2}$

134 $\sqrt[3]{x+1}=-1$ R. -2 — $\sqrt[3]{x^2-6x}=3$ R.-3; 9

135 $\sqrt{5x-2}=-4$ impossibile — $\sqrt{2-x^2+x}=6$ R. impossibile

136 $\sqrt{2x^2+9}=2$ impossibile — $\sqrt[3]{16x-64}=x-4$ R. 4; 8

137 $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$ R. $\frac{4-2\sqrt{13}}{3}$ — $\sqrt[3]{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$ R. $x=-\frac{2}{3}$

138 $-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ impossibile — $x-\sqrt{x+2}=0$ R. 2

139 $\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$ R. $1;-2\pm\sqrt{3}$ — $\sqrt{25-x^2}+x=7$ R. 3; 4

140 $\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$ R. $\frac{4}{3}$ — $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$ impossibile

141 $\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$ R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $\sqrt{3x^2+10}=3x$ R. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

142 $\sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x}}-x=0$ R. +1; -1 — $\sqrt[2]{\frac{2x^2-1}{x}}-x=0$ R. $1;\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

143 $\frac{4x+1}{2x}=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ impossibile — $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$ impossibile

144 $x\sqrt{(x^2-4)}=x^2-2$ impossibile — $\sqrt[3]{2x^2-7x+5}=1-x$ R. 1; -2; 2

145 $\frac{\sqrt{2x-3}}{x-2}=2$ R. $\frac{9+\sqrt{5}}{4}$ — $\sqrt{4x-1}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ R. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$

146 $\sqrt{x+2}=x-1$ R. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ — $2\sqrt{x^2-4x-33}-x=15$ R. $21;-\frac{17}{3}$

147 $(3-x)^2-\sqrt{x-2x^2+5}=(x-3)(x-2)$ R. $1;\frac{4}{3}$

148 $4x+\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}=\frac{7}{2}(x+1)$ R. 3; 4

149 $\frac{1}{3}\sqrt{5x^2+4x-8}+x=2\left(x-\frac{1}{3}\right)$ R. 1; 3

150 $1-x+\sqrt{8x^2-21x+34}=-3+2x$ R. 6

151 $\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}=x+\frac{3}{2}$ R. $-\frac{9}{16}$

152 Basta la condizione $x\geq 0$ per determinare l'insieme H in cui si possono ricercare le soluzioni di ciascuna delle equazioni $a]\ \sqrt{x}=\frac{1}{x+1}$ e $b]\ \sqrt[4]{x}=\frac{1}{4-x^2}$?

153 Verificate che per l'equazione $3+\sqrt{7-3x}-x=0$ l'insieme H è vuoto.

154 Perché l'equazione $\sqrt{x^2-1}=-3$ è impossibile?

►6. Equazioni con due o più radicali

Non potendo stabilire una forma canonica, procederemo mediante esempi al fine di acquisire un metodo risolutivo a seconda dei casi che si possono presentare.

■ $\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{x}$

Osserviamo subito che i due membri, nell'insieme in cui entrambi hanno significato, sono positivi.

Determiniamo quindi l'insieme H di definizione per entrambi: $H=\begin{cases}2-\frac{1}{x}\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$.

Risolvendo le due disequazioni otteniamo $\begin{cases}x<0\vee x\geq\frac{1}{2}\\ x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq\frac{1}{2}\right\}$.

Ora eleviamo al quadrato entrambi i membri ottenendo l'equazione razionale fratta

$2-\frac{1}{x}=x$ da cui $x_1=x_2=1$ poiché tale valore appartiene all'insieme H si ha $I.S.=\{1\}$.

■ $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+6x}=0$

Separiamo i due radicali $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{2x^2+6x}$.

Affinché i due membri dell'equazione siano positivi dobbiamo porre la condizione di positività anche al radicando del radicale cubico: $H=\begin{cases}x+3\geq 0\\ 2x^2+6x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=-3\vee x\geq 0\}$.

Per trasformare l'equazione data in un'equazione razionale, scriviamo radici con lo stesso indice. Il minimo comune indice è 6, perciò si ha $\sqrt[6]{(x+3)^3}=\sqrt[6]{(2x^2+6x)^2}$

Elevando alla sesta potenza si ha $(x+3)^3=(2x^2+6x)^2\ \rightarrow\ (x+3)^3-(2x^2+6x)^2=0$

Raccogliendo a fattore comune otteniamo $(x+3)^2\cdot(-4x^2+x+3)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto $\begin{matrix}(x+3)^2=0\ \rightarrow\ x+3=0\ \rightarrow\ x=-3\\ -4x^2+x+3=0\ \rightarrow\ x_1=-\frac{3}{4}\vee x_2=1\end{matrix}$;

Confrontiamo ora le soluzioni con le condizione poste in H: $I.S.=\{-3\,;1\}$.

■ $\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2x-1}=0$

Separiamo i due radicali $\sqrt{x}=-\sqrt{x^3+2x-1}$; osserviamo che i due membri nell'insieme in cui sono definiti sono di segno opposto e dunque l'uguaglianza sarà vera solo nel caso in cui entrambi si annullino. Il primo membro si annulla solo per $x=0$ che non annulla il secondo membro, pertanto l'equazione è impossibile.

■ $-\sqrt{x^2+3\mathrm{x}}+\sqrt{2\mathrm{x}+2}=0$

Portiamo la radice con il segno meno a secondo membro, in modo da avere due radici positive

$\sqrt{2\mathrm{x}+2}=\sqrt{x^2+3\mathrm{x}}$

Poniamo le condizione sull'accettabilità della soluzione

$\begin{cases}2\mathrm{x}+2\geq 0\\ x^2+3\mathrm{x}\geq 0\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x\geq -1\\ x\leq -3\vee x\geq 0\end{cases}\ \rightarrow\ x\geq -1$

Eleviamo ora al quadrato i due membri dell'equazione $2\mathrm{x}+2=x^2+3\mathrm{x}\ \rightarrow\ x^2+x-2=0$ le soluzioni sono $x_1=-2\,;\ x_2=1$.

Di queste due soluzioni solo x=1 soddisfa le condizioni di accettabilità.

■ $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$

In questo esempio ci sono altri termini oltre i due radicali. Spostiamo dopo l'uguale il radicale negativo in modo che sia a destra sia a sinistra i termini siano positivi: $\sqrt{x+7}=\sqrt{x-1}+2$

C.E. $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq 1 \end{cases} \to x\geq 1$

Torniamo all'equazione, eleviamo al quadrato $x+7=4+4\sqrt{x-1}+x-1 \to 4\sqrt{x-1}=4 \to \sqrt{x-1}=1$

Eleviamo nuovamente al quadrato $x-1=1 \to x=2$.

Poiché 2>1 la soluzione è accettabile.

■ $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$

Portiamo -1 al secondo membro in modo da avere tutti termini positivi: $\sqrt{x+12}=\sqrt{1-x}+1$

C.E. $\begin{cases} x+12\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x\geq -12 \\ x\leq 1 \end{cases} \to -12\leq x\leq 1$

Torniamo all'equazione ed eleviamo al quadrato ambo i membri $x+12=1-x+2\sqrt{1-x}+1$ semplificando $x+5=\sqrt{1-x}$. Scriviamo le condizioni per quest'altra equazione irrazionale

$\begin{cases} x+5\geq 0 \\ -12\leq x\leq 1 \end{cases} \to -5\leq x\leq 1$

Eleviamo al quadrato l'ultima equazione ottenuta $x^2+10x+25=1-x \to x^2+11x+24=0$

Le soluzioni sono x=-8 non accettabile, x=-3 accettabile.

■ $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$

Trasporto a destra il radicale che ha il segno meno, in modo che diventi positivo $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-4x}+x$

In questo caso risulta problematico risolvere il sistema con tutte le condizioni di accettabilità, perché bisognerebbe risolvere anche la disequazione irrazionale $\sqrt{1-4x}+x\geq 0$. Ci limiteremo allora a risolvere l'equazione e poi verificarne le soluzioni.

Elevo al quadrato ambo i membri $x^2+1=1-4x+x^2+2x\sqrt{1-4x}$

Semplificando si ha $4x=2x\sqrt{1-4x} \to 2x=x\sqrt{1-4x} \to 2x-x\sqrt{1-4x}=0 \to x(2-\sqrt{1-4x})=0$

Una soluzione è x=0, la seconda soluzione si ottiene da $2-\sqrt{1-4x}=0 \to 2=\sqrt{1-4x}$ elevando al quadrato si ha $4=1-4x \to x=-\frac{3}{4}$.

Verifichiamo ora le soluzioni. Per x=0 si ha $\sqrt{0^2+1}-\sqrt{1-4\cdot 0}=0 \to 1-1=0$ soluzione accettabile.

Per $x=-\frac{3}{4}$ si ha $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}-\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{4}$ da cui $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ soluzione accettabile.

■ $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$

Separiamo i due radicali, portiamo quello con il segno negativo a secondo membro $\sqrt{x+7}=2+\sqrt{x-1}$.

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali $H=\begin{cases} x+7\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \to H=\{x\in\mathbb{R} | x\geq 1\}$.

Analizziamo il secondo membro che dovrà essere positivo per permettere di costruire l'equazione razionale da risolvere $2+\sqrt{x-1}\geq 0$ che in H è certamente positivo essendo somma di termini positivi.

Eleviamo ambo i membri al quadrato $(\sqrt{x+7})^2=(2+\sqrt{x-1})^2$ facendo attenzione al secondo membro che si presenta come quadrato di binomio $x+7=4+4\cdot\sqrt{x-1}+(x-1) \to 4\cdot\sqrt{x-1}=4$.

Ci troviamo di fronte a un'altra equazione irrazionale, ma per le condizioni poste possiamo elevare al quadrato ambo i membri $x-1=1 \to x=2$.

Infine confrontiamo con l'insieme H, possiamo concludere $I.S.=\{2\}$.

■ $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali, $H=\begin{cases} x+12\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R}|-12\leq x\leq 1\}$

I due radicali sono già separati; ci conviene portare -1 al secondo membro per avere tutti termini positivi: $\sqrt{x+12}=1+\sqrt{1-x}$. Elevando al quadrato primo e secondo membro si ottiene $\sqrt{x-1}=5+x$.

Poniamo la condizione di positività sul secondo membro e otteniamo l'insieme $H_1=\begin{cases} 5+x\geq 0 \\ -12\leq x\leq 1 \end{cases}$, in sintesi $H_1=\{x\in\mathbb{R}|-5\leq x\leq 1\}$. Eleviamo al quadrato di nuovo e otteniamo $x^2+11x+24=0$ le cui soluzioni sono $x_1=-8\vee x_2=-3$; confrontando con H_1 possiamo concludere che $I.S.=\{-3\}$.

■ $\sqrt{2x-5}=3-\sqrt{x+1}$

Poniamo le condizione di realtà dei radicali: $H=\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x\geq\frac{5}{2}\right.\right\}$

Prima di procedere con l'elevamento a potenza, dobbiamo porre la condizione di concordanza del segno. Conviene trasportare al primo membro il radicale di destra. Nell'equazione trovata $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}=3$ possiamo eleviamo al quadrato $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}\right)^2=3^2 \rightarrow (2x-5)+(x+1)+2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=9$ da cui $2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=13-13x$ contenente un solo radicando. Nell'insieme H è garantita la realtà del radicale, ma dobbiamo imporre che il secondo membro sia non negativo; otteniamo $H_1=\begin{cases} x\geq\frac{5}{2} \\ 13-3x\geq 0 \end{cases} \rightarrow H_1=\left\{x\in\mathbb{R}\left|\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{13}{2}\right.\right\}$ in cui cerchiamo le soluzioni dell'equazione assegnata.

Elevando al quadrato si ha l'equazione razionale $x^2-66x+189=0 \rightarrow x_1=3\vee x_2=63$ e confrontando con H_1 si conclude $I.S.=\{3\}$.

■ $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$

Determiniamo l'insieme H ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà:

$H=\begin{cases} 1-4x\geq 0 \\ x^2+1\geq 0 \end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R}\left|x\leq\frac{1}{4}\right.\right\}$

Trasportiamo al secondo membro il radicale preceduto dal segno negativo: $\sqrt{x^2+1}=x+\sqrt{1-4x}$.

Prima di elevare al quadrato dovremmo porre le condizioni per la concordanza del segno e quindi risolvere $x+\sqrt{1-4x}\geq 0$ che è una disequazione irrazionale. Usiamo allora il metodo della verifica finale: si risolve l'equazione elevando al quadrato e giunti alle soluzioni si vanno a sostituire, una alla volta, nell'equazione iniziale individuando quale dei risultati rende vera l'uguaglianza.

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(x+\sqrt{1-4x}\right)^2 \rightarrow x^2+1=x^2+(1-4x)+2x\cdot\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x\cdot\sqrt{1-4x}=4x$ ·

Quest'ultima equazione presenta un solo radicale reale in H e ha i due membri concordi. Possiamo procedere elevando al quadrato oppure raccogliendo $2x$ a fattore comune e poi applicare la legge di annullamento del prodotto: $2x\sqrt{1-4x}-2=0 \rightarrow x=0\vee\sqrt{1-4x}=2$ e da questa si ottiene $x=-\frac{3}{4}$.

Verifica:

Sostituiamo $x=0$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $1-1=0$ vero.

Sostituiamo $x=-\frac{3}{4}$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $\frac{5}{4}-2=-\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$ vero.

Conclusione: $I.S.=\left\{0;-\frac{3}{4}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni con due radicali

155 $\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-x}$ R. impossibile

156 $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-3}$ R. impossibile

157 $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{3-x}$ R. $x=2\,;x=3$

158 $\sqrt{6-3x}=2+\sqrt{x+1}$ R. $x=\frac{3-2\sqrt{6}}{4}$

159 $\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2-x-1}$ R. $x=-1-\sqrt{6}$

160 $\sqrt{3-2x}=-\sqrt{x^2+3}$ R. $\emptyset$

161 $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}-1$ R. $x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

162 $2\sqrt{x-1}=\sqrt{1+2x}+1$ R. $x=4+2\sqrt{2}$

163 $3\sqrt{x-x^2}=2\sqrt{x-1}$ R. $x=1$

164 $\sqrt{x+1}=3\sqrt{4-x}$ R. $x=\frac{7}{2}$

165 $\sqrt{x^2-x-3}=2\sqrt{x+5}$ R. $x_1=\frac{5+3\sqrt{13}}{2}\,;x_2=\frac{5-3\sqrt{13}}{2}$

166 $1+2\sqrt{1-\frac{2}{3}x}=\sqrt{2x+1}$ R. $x=\frac{60}{49}$

167 $4-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}+3$ R. $x=2$

168 $2-2\sqrt{2-x}=4\sqrt{1-x}$ R. $x=1$

169 $\sqrt{x^3-2x^2}=3\sqrt{x^2-2x}$ R. $x_1=0\,;x_2=2\,;x_3=9$

170 $3\sqrt{x^4-x^3}=4\sqrt{x^4+2x^3}$ R. $x_1=0\,;x_2=-\frac{41}{7}$

171 $\sqrt{2x^2-4x-3}=\sqrt{x^2-1}$ R. $x=2+\sqrt{6}$

172 $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{4-x^2}$ R. $\emptyset$

173 $\sqrt{x^2-2\mathrm{x}+3}=\sqrt{1-x^2+2\mathrm{x}}$ R. $x=1$

174 $\sqrt{4x-7}+\sqrt{7x-4x^2}=0$ R. $\frac{7}{4}$

175 $\sqrt{x^2+6x+9}+2\cdot\sqrt{1-x}=0$ R. impossibile

176 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}+4=0$ R. impossibile

177 $\sqrt{x^2-4}=3+2\sqrt{1-x^2}$ R. $\emptyset$

178 $\sqrt{4+x^2}=1+\sqrt{x^2-1}$ R. $x_1=\sqrt{5}\,;x_2=-\sqrt{5}$

179 $\sqrt{2x+1}=3+2\sqrt{x-6}$ R. $x=26-6\sqrt{11}$

180 $\sqrt{x-2}-\sqrt{2\mathrm{x}-1}=\sqrt{5\mathrm{x}-1}$ R. $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

181 $\sqrt{\frac{(3-2\mathrm{x})}{(x-1)}}+\sqrt{2\mathrm{x}-1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ R. $\frac{3}{2}$

182 $\sqrt{(x-1)^2+\sqrt{5\mathrm{x}-6}}=2-x$ R. $\frac{5}{4}$

183 $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}$ R. 1

184 $\sqrt{\frac{x}{4-x}}+3\sqrt{\frac{4-x}{x}}-4=0$ R. $2\,;\frac{18}{5}$

185 $\frac{5}{6-\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\frac{6}{5-\sqrt{x}}$ R. 1; 64

►7. Disequazioni irrazionali

Concludiamo con un cenno alle disequazioni irrazionali, disequazioni nelle quali l'incognita compare sotto radice. Esaminiamo il caso in cui l'incognita è sotto radice quadrata e l'equazione presenta una sola radice. Qualunque sia la disequazione di partenza, ci si può sempre ricondurre ai seguenti due casi.

1° caso $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di una coppia di sistemi di disequazioni. Infatti distinguiamo due casi a seconda del segno della g(x).
Se g(x)<0 la disequazione è sicuramente verificata, in quanto al primo membro c'è una quantità sicuramente positiva in quanto radice quadrata; bisogna però corre la condizione di esistenza del radicando $f(x)\geq 0$.

Pertanto, il primo sistema è $\begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$.

Se $g(x)\geq 0$, dopo aver posto la condizione di esistenza del radicale $f(x)\geq 0$ si possono elevare al quadrato i due membri dell'equazione, in quanto entrambi positivi. Si ottiene il sistema $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$

del quale si può eliminare la seconda disequazione in quanto la prima e la seconda disequazione implicano automaticamente che $f(x)>0$. In definitiva

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$$

■ $\sqrt{25-x^2} > x-5$

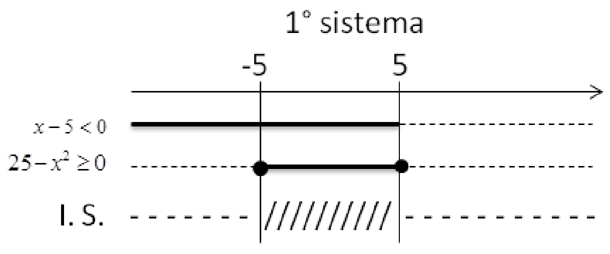
La disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} x-5<0 \\ 25-x^2\geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-5\geq 0 \\ 25-x^2>(x-5)^2 \end{cases}$

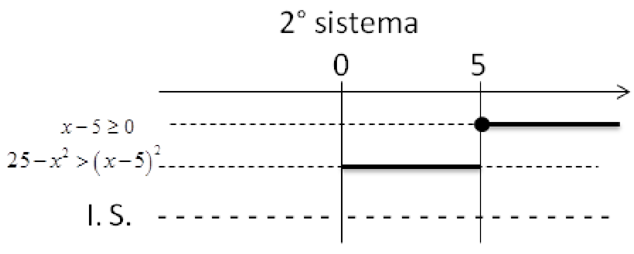
Il primo sistema $\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ 25-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 25 \rightarrow -5\leq x\leq 5 \end{cases}$ verificato per $-5\leq x\leq 5$

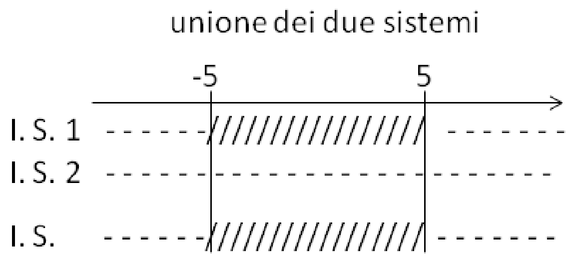
Il secondo sistema

$\begin{cases} x-5\geq 0 \rightarrow x\geq 5 \\ 25-x^2>(x-5)^2 \rightarrow 25-x^2>x^2-10\text{x}+25 \rightarrow 2\text{x}^2-10\text{x}<0 \rightarrow 2\text{x}(x-5)<0 \rightarrow 0<x<5 \end{cases}$

mai verificato: $I.S.=\emptyset$.







L'Insieme Soluzione della disequazione è 0<x<5.

2° caso $\sqrt{f(x)}<g(x)$

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di un solo sistema di disequazioni, in quanto la condizione $g(x)\le 0$ non dà soluzioni, in quanto la radice del primo membro dovrebbe essere minore di un numero negativo, cosa non possibile in quanto le radici danno sempre valori positivi. Rimane allora da esaminare la condizione g(x)>0; in questo caso si può elevare al quadrato primo e secondo membro ma resta sempre da aggiungere la condizione di esistenza del radicale, cioè $f(x)\ge 0$. In definitiva

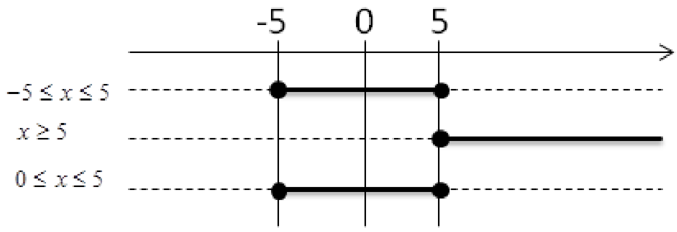
$$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$$

■ $\sqrt{25-x^2}\le x-5$

La disequazione presenta il segno di minore, pertanto è equivalente a un sistema di tre disequazioni:

$$\sqrt{25-x^2}\le x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2\ge 0 \\ x-5\ge 0 \\ 25-x^2\le (x-5)^2 \end{cases}$$ Sviluppando il sistema di ha

$$\begin{cases} 25-x^2\ge 0 \rightarrow x^2\le 25 \rightarrow -5\le x\le 5 \\ x-5\ge 0 \rightarrow x\ge 5 \\ 25-x^2\le (x-5)^2 \rightarrow 25-x^2\le x^2-10\mathrm{x}+25 \rightarrow 2\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}\le 0 \rightarrow 2\mathrm{x}(x-5)\le 0 \rightarrow 0\le x\le 5 \end{cases}$$



La disequazione è verificata solo per x=5.

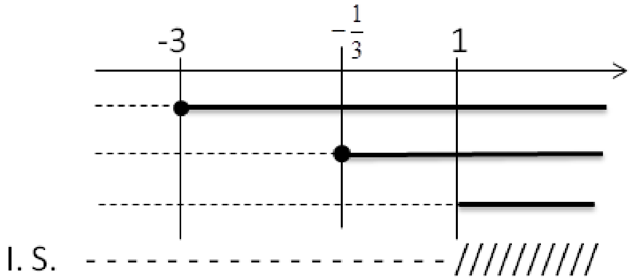
■ $\sqrt{x+3}<\sqrt{3\mathrm{x}+1}$

La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+3\ge 0 \text{ condizione di esistenza del primo radicale} \\ 3\mathrm{x}+1\ge 0 \text{ condizione di esistenza del secondo radicale} \\ x+3<3\mathrm{x}+1 \text{ i due membri della disequazione sono positivi, si può elevare al quadrato} \end{cases}$$

Eseguendo i vari passaggi si ha

$$\begin{cases} x+3\ge 0 \rightarrow x\ge -3 \\ 3\mathrm{x}+1\ge 0 \rightarrow x\ge -\frac{1}{3} \\ x+3<3\mathrm{x}+1 \rightarrow -2\mathrm{x}<-2 \rightarrow x>1 \end{cases}$$



La disequazione è verificata per x>1

Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali

186 $\sqrt{4x^2-x}\geq -2x+1$ R. $x\geq\frac{1}{3}$

187 $\sqrt{x^2-x-2}\leq 2x+6$ R. $-2\leq x\leq -1\vee x\geq 2$

188 $\sqrt{2x-1}\geq x-8$ R. $\frac{1}{2}\leq x\leq 13$

189 $\sqrt{x^2-3x+2}<7-5x$ R. $x\leq 1$

190 $\sqrt{9x^2+2x}\geq 3x-4$ R. $x\leq -\frac{2}{9}\vee x\geq 0$

191 $\sqrt{x^2-2x}\geq 5-x$ R. $x\geq\frac{25}{8}$

192 $\sqrt{16-2x^2}<x+4$ R. $-2\sqrt{2}\leq x<-\frac{8}{3}\vee 0<x\leq 2\sqrt{2}$

193 $\sqrt{3-2x}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. impossibile

194 $\sqrt{4x^2+2x}\geq 2x-3$ R. $x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 0$

195 $\sqrt{1-x^2}>2x-1$ R. $-1\leq x<\frac{4}{5}$

196 $\sqrt{2x^2-x-1}>\sqrt{x-3}$ R. $x\geq 3$

197 $\sqrt{x^2+2x+1}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. $-1\leq x\leq 0$

198 $\sqrt{16x^2+2x}\geq -4x-1$ R. $x\leq -\frac{1}{8}\vee x\geq 0$

199 $\sqrt{x^2-1}<x+3$ R. $-\frac{5}{3}<x\leq -1\vee x\geq 1$

200 $\sqrt{x^2-3x+2}\leq\sqrt{3x^2-2x-1}$ R. $x\leq -\frac{3}{2}\vee x=1\vee x\geq 2$

201 $\sqrt{9x^2-x}\geq -3x+6$ R. $x\geq\frac{36}{35}$

202 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{x+\sqrt{3}}{2}$ R. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

203 $\sqrt{x^2-5x}\geq x-4$ R. $x\leq 0\vee x\geq\frac{16}{3}$

204 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{1}{2}x+1$ R. $0\leq x\leq\frac{4}{3}$

205 $\sqrt{10x-x^2}>\sqrt{2x^2-32}$ R. $4\leq x<\frac{16}{3}$

206 $\sqrt{x^2+x}\geq x+3$ R. $x\leq -\frac{9}{5}$

207 $\sqrt{x^2+1}\leq\frac{1}{2}x-1$ R. impossibile

208 $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{1-x^2}$ R. x=0

209 $\sqrt{2x^2+x}\geq\sqrt{4-x^2}$ R. $-2\leq x\leq -\frac{4}{3}\vee 1\leq x\leq 2$

210 $3\sqrt{3x+x^2}<2\sqrt{2x-x^3}$ R. $x\leq -3$

211 $2\sqrt{x+x^3}>\sqrt{2x^3-3x^2}$ R. $x\geq\frac{3}{2}$

212 $\sqrt{x^5-x^3}<2\sqrt{x^4+2x^3}$ R. $1\leq x<2+\sqrt{13}$

Autori

Francesco Daddi: teoria, esercizi
Antonio Bernardo: coordinamento, esercizi, integrazioni
Claudio Carboncini: teoria, editing
Gemma Fiorito: teoria, esercizi
Anna Cristina Mocchetti: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 12.07.2012