# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 5. SISTEMI NON LINEARI

*Canterbury Cathedral* by Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705


**Indice**

## ►1. Sistemi di secondo grado

Un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

DEFINIZIONE. Il **grado di un sistema di equazioni**, se le equazioni che formano il sistema sono costituite da polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Esempio

Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

A) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$

La prima equazione e la seconda equazione sono di primo grado.
Il sistema è di primo grado

B) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$

La prima equazione è di primo grado, la seconda equazione di secondo grado.
Il sistema è di secondo grado.

C) $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ y=3x^2-2x+6=0 \end{cases}$

La prima equazione è di secondo grado, come la seconda.
Il sistema è di quarto grado.

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da un'equazione di secondo grado e una di primo grado.

### Sistemi di secondo grado numerici

Esempio

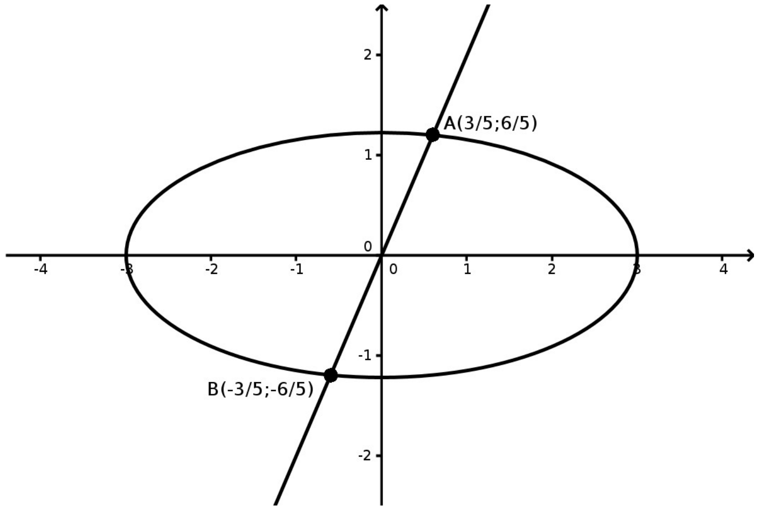
■ $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=2x \\ x^2+6\cdot(2x)^2-9=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=2x \\ x^2+24x^2-9=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $25x^2-9=0 \to x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y. Le coppie $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ se ci sono, si dicono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases} \to \begin{cases} \begin{cases} x_1=-\frac{3}{5} \\ y_1=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=+\frac{3}{5} \\ y_2=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=+\frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \to \left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Nel corso degli studi vedremo come le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=2x$ e l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2+6y^2=9$ . Con il software Geogebra inseriamo le due equazioni e otteniamo la seguente figura.




I punti A e B, intersezione tra la retta e l'ellisse corrispondono alle soluzioni del sistema.

Esempio

■ $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$

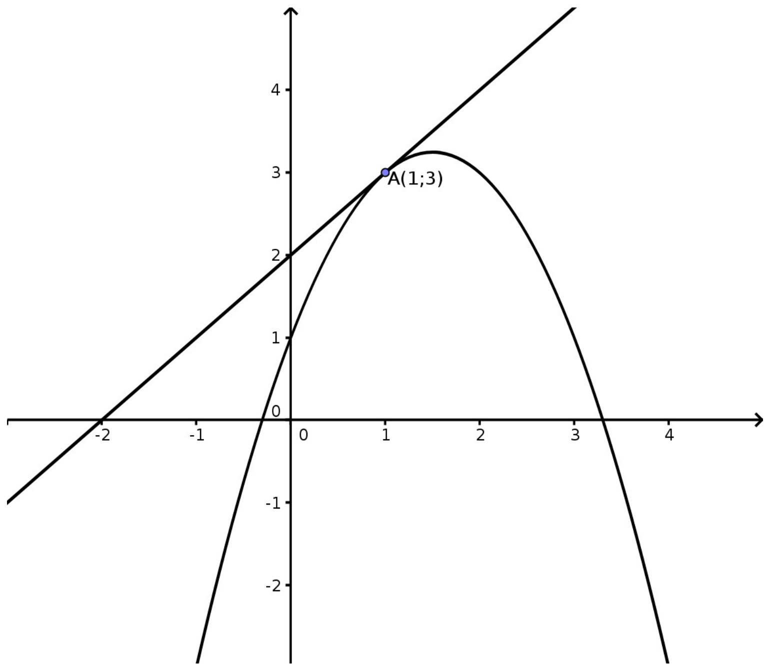
Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+(x+2)-3x-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$

Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. L' **equazione risolvente del sistema**. $x^2-2x+1=0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1=x_2=1$ .

Il sistema ha due soluzioni reali coincidenti, $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+2=3 \end{cases} \rightarrow (1;3)$

La soluzione del sistema $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=x+2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y=-x^2+3x+1$ . La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola.

Ecco come appare la rappresentazione grafica ottenuta con Geogebra.



Esempio

- $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$

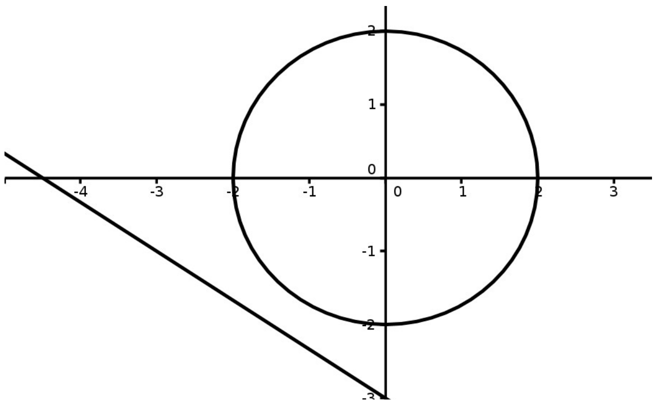
Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\left(-\frac{2}{3}x-3\right)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\frac{4}{9}x^2+4x+9-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ \frac{13}{9}x^2+4x+5=0 \end{cases}$$

Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $\frac{13}{9}x^2+4x+5=0$ . Il discriminante dell'equazione è negativo: $\Delta=16-\frac{260}{9}<0$ , quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $I:S=\emptyset$ .

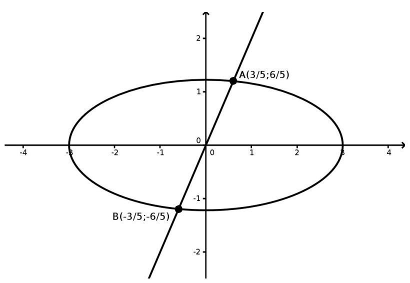
Il sistema non ha soluzioni reali e il sistema si dice **impossibile**.

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{2}{3}x-3$ e la circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$ . La seguente figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in Geogebra. Notiamo che le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro.

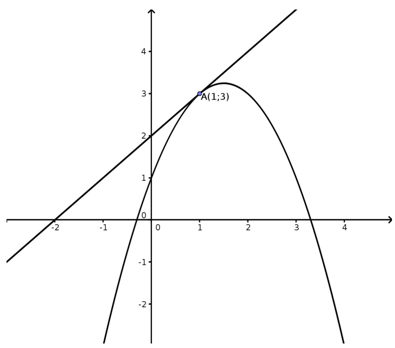


Osservazione: Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza , parabola, ellisse o iperbole).
Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva.
In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

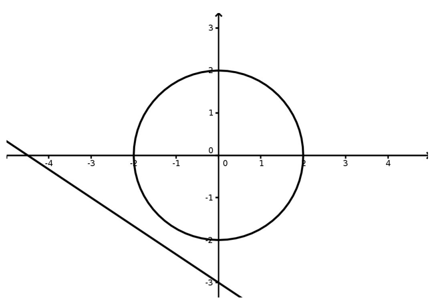
- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti.
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.




$\Delta>0$




$\Delta=0$



$\Delta<0$

**Conclusione**

- Se l'equazione risolvente è di **secondo grado,** in base al discriminante abbiamo:
  - $\Delta < 0$ : l'equazione risolvente è impossibile: in questo caso anche il sistema risulta essere impossibile.
  - $\Delta = 0$ : l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti: in questo caso il sistema si completa sostituendo il valore trovato nell'equazione di primo grado. Il sistema ha due soluzioni coincidenti. La soluzione è una coppia ordinata di numeri reali.
  - $\Delta > 0$ : l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte: si sostituisce allora ciascuno dei due valori trovati nell'equazione di primo grado. Le due coppie ordinate di numeri reali trovate sono entrambe soluzioni del sistema.

- Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di **primo grado** o una **uguaglianza** vera o falsa:
  - se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;
  - se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
  - se l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso di $\Delta = 0$ ).

*Esempi*

■ $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 + 5y^2 = 6 \end{cases}$ .

Ricava $y$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:.

$$\begin{cases} y = 1 - 2\text{x} \\ x^2 + 5y^2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2\text{x} \\ x^2 + 5(1 - 2\text{x})^2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2\text{x} \\ 21x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

Risolvi l'equazione risolvente di secondo grado, verifica che le soluzioni sono $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{21}$

Sostituisci i valori trovati per la $x$ nell'equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti di y:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 - 2(-1) = \ldots\ldots \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{21} \\ y_2 = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow (1; \ldots) \vee \left(-\frac{1}{21}; \ldots\ldots\right)$$

■ $\begin{cases} 2\text{x} - 3y = 1 \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$

Ricaviamo $x$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1 + 3y}{2} \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3y}{2} \\ \left(\frac{1 + 3y}{2}\right)^2 - 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3y}{2} \\ -\frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente ha il discriminante uguale a 0, quindi ha due soluzioni reali coincidenti: $y_1 = y_2 = 1$

Sostituiamo i valori trovati per la y nell'equazione di primo grado per trovare il valore corrispondente di x.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ y_1 = y_2 = 1 \end{cases} \rightarrow (2; 1)$$

■ $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

Ricaviamo $y$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = \frac{5x - 3}{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{5x - 3}{2} \\ x^2 - \left(\frac{5x - 3}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{5x - 3}{2} \\ -\frac{21}{4}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{13}{4} = 0 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione associata. In questo caso il discriminante dell'equazione è negativo. L'equazione risolvente non ha soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

- $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=0 \end{cases}$

L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è una **identità** (uguaglianza vera) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y=-x$ ) sono soluzioni del sistema: $\forall\ k\in\mathbb{R} \rightarrow I.S.=(k\,;-k)$ .

Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice **indeterminato**.

- $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x+y=0 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=9 \end{cases}$

L' equazione risolvente del sistema in questo caso è una **contraddizione** (uguaglianza falsa).
Il sistema è **impossibile**.

- $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata.

$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2+2x-1-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases}$

L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è l'equazione di primo grado $2x+5=0$ , la cui soluzione è $x=\dfrac{5}{2}$ .

Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica: $\begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

*Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado*

**1** $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(-1;-1) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$

**2** $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$ R. $(1;1) \vee (-1;-1)$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$ R. $\left(0;-\frac{2}{5}\right) \vee \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$

**3** $\begin{cases} y^2-3y=2xy \\ y=x-3 \end{cases}$ R. $(3;0) \vee (-6;-9)$ $\qquad$ $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$

**4** $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+5y^2=23 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{29}{5},\frac{12}{5}\right) \vee (3,-2)$ $\qquad$ $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{46}{27},-\frac{20}{27}\right) \vee (2{,}0)$

**5** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $(3;1) \vee (5;3)$

**6** $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1)$

**7** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-3x+2y=3 \end{cases}$ R. $(0;1) \vee \left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**8** $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

**9** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y+7=0 \end{cases}$ R. $(-4;-3) \vee \left(\frac{44}{25};\frac{117}{25}\right)$

**10** $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-4xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{10}{7};\frac{11}{14}\right)$

**11** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $\left(2;-\frac{3}{2}\right) \vee \left(\frac{22}{25};-\frac{89}{50}\right)$

**12** $\begin{cases} 2x^2+xy-7x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $y=-2x+3 \rightarrow \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}$

**13** $\begin{cases} x-2y-7=0 \\ x^2-xy=4 \end{cases}$ R. $(1;-3) \vee \left(-8;-\frac{15}{2}\right)$

**14** $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$ R. $(-2;2) \vee \left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

**15** $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-x+2y-4=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ R. $(4;4) \vee (-5;-2)$

**16** $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ R. $(4;2) \vee \left(\frac{4}{15};-\frac{2}{15}\right)$

**17** $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$ R. $\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \vee \left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

**18** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-2xy-2y-2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)$

**19** $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2-2x+6y=8 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{-9+\sqrt{241}}{8};\frac{-25+\sqrt{241}}{16}\right) \vee \left(\frac{9+\sqrt{241}}{8};\frac{25+\sqrt{241}}{16}\right)$

**20** $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};\frac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right) \vee \left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};\frac{2+3\sqrt{2}}{4}\right)$

**21** $\begin{cases} \frac{1}{2}(2y-x)(y+x)-(x+y)^2+\frac{3}{2}x(x+y+1)+2(y-1)=0 \\ \frac{2}{3}(x-3)^2+4\left(x-\frac{3}{2}\right)=2(xy+1) \end{cases}$ R. $\left(\frac{6\pm 8\sqrt{3}}{13};\frac{17\mp 12\sqrt{3}}{13}\right)$

### Sistemi di secondo grado letterali

Esempio

■ $\begin{cases} y-kx=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases}$

Si risolve come nel caso degli analoghi sistemi numerici. Bisognerà, nell'equazione risolvente, discutere per quali valore del parametro si otterranno soluzioni reali. Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda equazione: $\begin{cases} y=kx-2 \\ kx-2-x^2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=kx-2 \\ -x^2+kx-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=kx-2 \\ x^2-kx+4=0 \end{cases}$

Risolviamo e discutiamo l'equazione di secondo grado

$$\Delta=k^2-16 \rightarrow \begin{array}{l} \Delta>0 \rightarrow k<-4 \vee k>4 \rightarrow x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \vee x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta=0 \rightarrow k=-4 \vee k=4 \rightarrow x_1=x_2=\frac{k}{2} \\ \Delta<0 \rightarrow -4<k<4 \end{array}$$

Ricaviamo i valori della x e li sostituiamo nella prima equazione:

$$\begin{cases} y-kx=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases} \text{ se } k\le-4 \vee k\ge4 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1=\frac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2=\frac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}$$

*Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro*

**22** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$ R. se $k\ge\frac{9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases}$

**23** $\begin{cases} ky+2x=4 \\ xy=2 \end{cases}$ R. se $k\le1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1-\sqrt{1-k} \\ y_1=-\frac{2}{\sqrt{1-k}-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=1+\sqrt{1-k} \\ y_2=\frac{2}{\sqrt{1-k}+1} \end{cases}$

**24** $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2-kx^2+1=0 \end{cases}$ R. se $0<k<1 \vee 1<k\le2 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_1=\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_2=\frac{1+\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases}$

**25** $\begin{cases} y=kx-2k \\ x^2-2y-x=2 \end{cases}$ R. $\forall k\in\mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2k-1 \\ y_2=2k^2-3k \end{cases}$

**26** $\begin{cases} y=x+k \\ y=3x^2+2x \end{cases}$ R. se $k\ge-\frac{1}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1-\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1+\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases}$

**27** $\begin{cases} y=-x+k \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2};\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2}\right);\left(\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2};\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2}\right)$

**28** $\begin{cases} y+x-k=0 \\ xy+2kx-3ky-6k^2=0 \end{cases}$ R. $\forall k\in\mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=3k \\ y_1=y_2=-2k \end{cases}$

**29** $\begin{cases} y-x+k=0 \\ y-x^2+4x-3=0 \end{cases}$ R. se $k\le\frac{13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k-\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k+\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases}$

### Sistemi di secondo grado frazionari

Esempio

■ $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \end{cases}$ .

Il sistema dà origine a un'equazione di secondo grado. Nel caso dei sistemi frazionari occorre procedere alla definizione del campo di esistenza dell'equazione frazionaria, discutendo i denominatori della equazione.

Determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione frazionaria: $C.E.\ y\neq -2 \wedge y\neq -\dfrac{5}{2}$

Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera

$\dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \rightarrow x\cdot(2y+5)-x\cdot(y+2)=0 \rightarrow 2xy+5x-xy-2x=0 \rightarrow xy+3x=0$

Sostituiamo l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni: $\begin{cases} y=2x-2 \\ xy+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x(2x-2)+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}$

$2x^2+x=0$ è l'equazione risolvente del sistema con soluzioni $x_1=0 \vee x_2=\dfrac{1}{2}$

sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado ottenendo le soluzioni del sistema

$\begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2} ¿ \\ y_2=-1 \end{cases} \rightarrow (0;-2) \vee \left(\dfrac{1}{2};-1\right)$

La soluzione $(0;-2)$ non soddisfa le C.E. . Il sistema ha soluzione $\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ .

*Trova le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari*

**30** $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x+2y}{x-1}=2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 1 \rightarrow (2;0)\vee\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right)\right]$

**31** $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}=4 \\ x^2+y^2+3x-2y=1 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq y \rightarrow \left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)\vee(-2;-1)\right]$

**32** $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+2y}=3 \\ xy+3y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -2y \rightarrow \emptyset]$

**33** $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{x}=\dfrac{1-x}{y-1} \\ 2x-y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq 0 \wedge y\neq 1 \rightarrow (4;7)]$

**34** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-2}=y+\dfrac{1}{3} \\ y=2x+2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 2 \rightarrow (-1;0)\vee\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{26}{3}\right)\right]$

**35** $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y-2}=\dfrac{y-1}{x+1} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq -1 \wedge y\neq 2 \rightarrow \left(-\dfrac{5}{2};4\right)\right]$

**36** $\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+y}=x \\ x-y=0 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -y \rightarrow \emptyset]$

**37** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2y-1}=y \\ 2y-x=-4 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ y\neq \dfrac{1}{2} \rightarrow (2;-1)\vee\left(9;\dfrac{5}{2}\right)\right]$

### Sistemi di secondo grado in tre incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni a partire dalle equazioni di primo grado, per ottenere un'equazione di secondo grado in una sola incognita (equazione risolvente del sistema). A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema.

Esempio

■ $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$

Isoliamo z dalla prima equazione, che è di primo grado, e sostituiamo nelle altre equazioni.

$$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre equazioni

$$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$

L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema, le sue soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$

Sostituiamo i valori trovati per la y nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della x e della z.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} z=5(2)-2=8 \\ x=2(2)-1=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} z=5(-1)-2=-7 \\ x=2(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{array} \rightarrow (x_1;y_1;z_1)\vee(x_2;y_2;z_2) \rightarrow (3;2;8)\vee(-3;-1;-7)$$

*Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite*

**38** $\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x^2+2xz+y^2=6 \end{cases}$ R. $(1;2;-1)$ $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ x^2-y+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**39** $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x^2-y+z=3 \end{cases}$ infinite soluzioni $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ x^2-y^2+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{47}{3};-\frac{46}{3};\frac{5}{3}\right)$

**40** $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 5y+2z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=29 \end{cases}$ R. $(5;0;-2)\vee(-2;0;5)$

**41** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=9 \\ x^2-y+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-4;\frac{25}{2};\frac{17}{2}\right)\vee\left(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

**42** $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$ R. $(-1;-2;3)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$

**43** $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+y^2+z^2=32 \end{cases}$ R. $\left(0;\frac{3\sqrt{7}+1}{2};-\frac{3\sqrt{7}-1}{2}\right)\vee\left(0;-\frac{3\sqrt{7}-1}{2};\frac{3\sqrt{7}+1}{2}\right)$

## ►2. Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice **simmetrico** se non cambia scambiando le incognite.

Per esempio, nel sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3xy+5=0 \end{cases}$ se scambiamo la $x$ con la $y$ otteniamo $\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3\text{yx}+5=0 \end{cases}$ che è identico al precedente. Le soluzioni sono $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}$ e come si può notare x e y vengono scambiate nella soluzione.

In generale, se il sistema è simmetrico trovata una soluzione otteniamo la soluzione simmetrica scambiando la x con la y e la y con la x.

### Sistemi simmetrici di secondo grado

Per risolvere un sistema del tipo $\begin{cases} x+y=s \\ x\,y=p \end{cases}$ è sufficiente ricordare che nell'equazione del tipo $x^2+b\,x+c=0$ , la somma delle radici è -b, mentre il prodotto è c. Pertanto, basta risolvere la seguente equazione, detta **equazione risolvente:** $\boldsymbol{t^2-s\,t+p=0}$ con s=-b e p=c.

In base al segno del discriminante abbiamo:

$\Delta>0$ l'equazione risolvente ha soluzioni $t_1$ e $t_2$, il sistema ha per soluzioni: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=t_1 \end{cases}$ .

$\Delta=0$ la risolvente ha radici coincidenti $t_1=t_2$ , le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_1 \\ y_2=t_1 \end{cases}$ .

$\Delta<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

Esempi

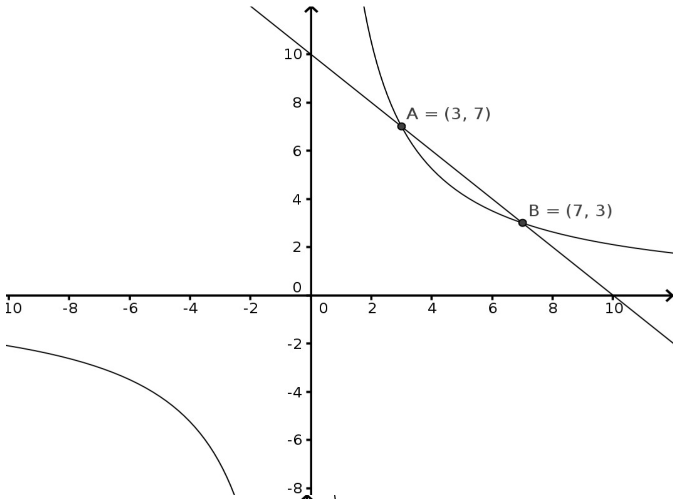
■ $\begin{cases} x+y=10 \\ x\,y=21 \end{cases}$

Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-10t+21=0$

Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=7$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=3 \end{cases}$ .

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=10$ interseca l'iperbole equilatera $xy=21$ nei due punti $A(7;3)$ e $B(3;7)$ .



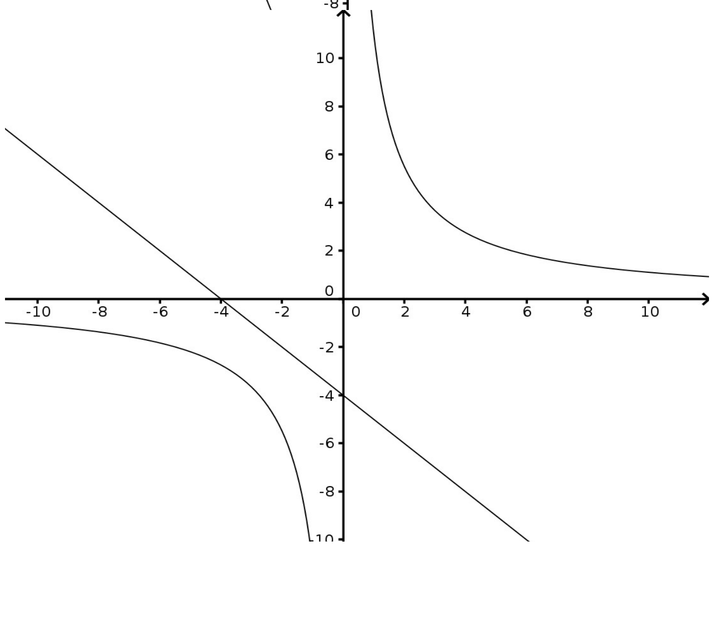

■ $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\,y=11 \end{cases}$

Otteniamo l'equazione risolvente $t^2+4t+11=0$

L'equazione risolvente ha discriminante negativo e non ha soluzioni reali

Il sistema è impossibile

Interpretando la situazione nel piano cartesiano, possiamo osservare che la retta $x+y=-4$ non interseca l'iperbole equilatera $xy=11$ .



*Risolvere i seguenti sistemi simmetrici*

**44** $\begin{cases}x+y=4\\ xy=3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=1\\ xy=7\end{cases}$ R. $\emptyset$

**45** $\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=-6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=-6\end{cases} \vee \begin{cases}x=-6\\ y=1\end{cases}$

**46** $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=3\\ xy=-4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$

**47** $\begin{cases}x+y=-4\\ xy=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=6\\ xy=9\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$

**48** $\begin{cases}x+y=2\\ xy=10\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$

**49** $\begin{cases}x+y=-1\\ xy=2\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=12\\ xy=-13\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=13\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=13\end{cases}$

**50** $\begin{cases}x+y=\dfrac{6}{5}\\ xy=\dfrac{9}{25}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=4\\ xy=50\end{cases}$ R. $\emptyset$

**51** $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=-14\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=-7\end{cases} \vee \begin{cases}x=-7\\ y=2\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=5\\ xy=-14\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=7\\ y=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\ y=7\end{cases}$

**52** $\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{4}\\ xy=-\dfrac{3}{8}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-10\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1+\sqrt{11}\\ y=1-\sqrt{11}\end{cases} \vee \begin{cases}x=1-\sqrt{11}\\ y=1+\sqrt{11}\end{cases}$

**53** $\begin{cases}x+y=4\\ xy=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases} \vee \begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{2}\\ xy=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

**54** $\begin{cases}x+y=-5\\ xy=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\\ y=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\\ y=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$

**55** $\begin{cases}x+y=\dfrac{4}{3}\\ xy=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{4+\sqrt{34}}{6}\\ y=\dfrac{4-\sqrt{34}}{6}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{4-\sqrt{34}}{6}\\ y=\dfrac{4+\sqrt{34}}{6}\end{cases}$

**56**

**57** $\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{2}\\ xy=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{5+\sqrt{97}}{4}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{97}}{4}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{5-\sqrt{97}}{4}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{97}}{4}\end{cases}$

**58** $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}x=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

**59** $\begin{cases}x+y=1\\ xy=-3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

**60** $\begin{cases}x+y=4\\ xy=-50\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2+3\sqrt{6}\\ y=2-3\sqrt{6}\end{cases} \vee \begin{cases}x=2-3\sqrt{6}\\ y=2+3\sqrt{6}\end{cases}$

**Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale**

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici algebrici, possono essere trasformati, in modo equivalente, in sistemi simmetrici del tipo precedente.

Esempio

- $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$

È possibile trasformare il sistema in un sistema simmetrico fondamentale.
Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ , il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases} \to \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \to \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \to \begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}$$

Posto $a=s$ e $p=\dfrac{a^2+ab-c}{2}$ i sistemi $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ risultano equivalenti.

Vediamo alcuni esempi di sistemi simmetrici che possono essere risolti con questi metodi.

- $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ , il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema simmetrico, otteniamo l'equazione risolvente $t^2-7t+12=0$
Le soluzioni dell'equazione risolvente sono: $t_1=3 \vee t_2=4$
Le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-12 \\ (x+y)^2-2xy=72 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-12 \\ -2xy=\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-12 \\ xy=36 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione $t^2+12t+36=0$ , otteniamo: $t_1=t_2=-6$ , da cui la soluzione $\begin{cases} x_1=-6 \\ y_1=-6 \end{cases}$.

- $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

Dividendo per −3 la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$$\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^2-2xy=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\dfrac{5}{3} \\ xy=-\dfrac{10}{9} \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione risolvente $t^2-\dfrac{5}{3}t-\dfrac{10}{9}=0$

Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \vee t_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}$

Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \\ y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6} \\ y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6} \end{cases}$

*Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale*

**61** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

**62** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+x+y=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**63** $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ **R.** $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-3xy=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

**64** $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ (y-x)^2-xy=101 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-5 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-5 \end{cases}$

**65** $\begin{cases} -4x-4y=-44 \\ 2x^2+2y^2-3xy=74 \end{cases}$. R. $\begin{cases} x_1=8 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=8 \end{cases}$

**66** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2-4x-4y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

**67** $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

**68** $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ 4x^2+4y^2=52 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

**69** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4} \\ 3x^2+3y^2=\dfrac{15}{4} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$

**70** $\begin{cases} x+y=-3 \\ x^2+y^2-5xy=37 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$

**71** $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+y^2-xy=84 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases}$

**72** $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2-4xy+5x+5y=36 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

**73** $\begin{cases} x+y=-7 \\ x^2+y^2-6xy-3x-3y=44 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{13}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{13}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

**74** $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**75** $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=-7 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**76** $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

**77** $\begin{cases} x^2+y^2-4xy-6x-6y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

**78** $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ y=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

### Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

Esempi

■ $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$

Mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ con la procedura appena vista. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2'=3 \end{cases}$

Dall'uguaglianza $y'=-y \rightarrow y=-y'$ otteniamo le soluzioni del sistema dato $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-3 \end{cases}$.

■ $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$

| Riduzione a un sistema simmetrico | Procedura di sostituzione |
|---|---|
| • Mediante la sostituzione $x'=2x$ e $y'=-3y \rightarrow x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo $\begin{cases} x'+y'=8 \\ \frac{x'}{2}\cdot\left(-\frac{y'}{3}\right)=2 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale. | • Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e la sostituiamo nell'altra equazione $\begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ xy=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ 2x^2-8x-6=0 \end{cases}$ |
| • Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1'=4-2\sqrt{7} \\ y_1'=4+2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2'=4+2\sqrt{7} \\ y_2'=4-2\sqrt{7} \end{cases}$ | • Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita: $2x^2-8x-6=0$ equivalente a $x^2-4x-3=0$. Applicando la formula ridotta otteniamo: $x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7}$ |
| • Dalle uguaglianza $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$ | • Sostituiamo i valori trovati per la x nella equazione di primo grado e troviamo i valori della y $\begin{cases} x_1=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$ |

**79** $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ R. (-1; -2), (2;1)

**80** $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-12 \\ xy=\frac{1}{35} \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{5}\right),\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{7}\right)$

**81** $\begin{cases} -2x+y=3 \\ xy=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

### Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni di formule dette di Waring, dal nome del matematico che le ha formulate per primo, che potranno essere utili per risolvere i sistemi simmetrici. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono. Indicate come $s$ somma delle variabili e $p$ il loro prodotto queste sono le prime formule fino alla potenza quinta.

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=s^2-2p$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=s^3-3ps$
- $a^4+b^4=(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3=(a+b)^4-6a^2b^2-4ab(a^2+b^2)=$ $=s^4-6p^2-4p\left(s^2-2p\right)=s^4-4ps^2+2p^2$
- $a^5+b^5=(a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4=(a+b)^5-5ab(a^3+b^3)-10a^2b^2(a+b)=$ $=s^5-5p\left(s^3-3ps\right)-10sp^2=s^5-5ps^3+5p^2s$

Esempi

■ $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$

Applicando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ , il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)-2xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (1)^3-3xy(1)-2xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 1-5xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Da cui l'equazione risolvente $t^2-t-\frac{2}{5}=0 \rightarrow 5t^2-5t-2=0$ con $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{10} \vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{10}$

Le soluzioni del sistema sono: $\left(\frac{5-\sqrt{65}}{10};\frac{5+\sqrt{65}}{10}\right),\left(\frac{5+\sqrt{65}}{10};\frac{5-\sqrt{65}}{10}\right)$

■ $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Ricordando l'identità $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$ , il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^4-4xy(-1)^2+2x^2y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x^2y^2-4xy-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$$

Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$ . L'equazione $2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0$ diventa

$2u^2-4u-\frac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\frac{1}{2} \vee u_2=\frac{5}{2} \rightarrow xy=-\frac{1}{2} \vee xy=\frac{5}{2}$ .

Il sistema di partenza è equivalente all'unione $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ .

Il primo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$ da cui $t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \vee t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Il sistema ha soluzioni $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$

Il secondo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t+\frac{5}{2}=0$ , che ha $\Delta<0$ , l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

■ $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

Dall'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ si ha $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2(-2)=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$

Il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$ è equivalente all'unione dei due sistemi fondamentali $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ .

Risolviamo il primo $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2-3t-2=0$ da cui

$t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ . Il sistema ha soluzioni $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ .

Risolviamo il secondo sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+3t-2=0$

con soluzioni $t_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$

Il sistema ha quindi quattro soluzioni.

■ $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$

Dall'identità $x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)$ , il sistema può essere riscritto come:

$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)=-211 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^5-5xy(-1)^3+5x^2y^2(-1)=-211 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$

I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$ .
L'equazione $-5x^2y^2+5xy+210=0$ diventa $-5u^2+5u+210=0$ che ha come soluzioni $u_1=-6 \vee u_2=7 \to xy=-6 \vee xy=7$ .

Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$

Il primo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t-6=0$ con soluzioni $t_1=-3 \vee t_2=2$ . Il sistema ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

Il secondo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t+7=0$ , con $\Delta<0$ e insieme soluzione vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ xy=-14 \end{cases}$

Se eleviamo al cubo la seconda equazione otteniamo il sistema equivalente $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ x^3y^3=-2744 \end{cases}$

Mediante le sostituzioni $u=x^3$ e $v=-y^3$ otteniamo $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ con la procedura nota. Le soluzioni sono le seguenti:

$\begin{cases} u_1=8 \\ v_1=343 \end{cases} \vee \begin{cases} u_2=343 \\ v_2=8 \end{cases}$

Dalle uguaglianze $u=x^3 \to x=\sqrt[3]{v}$ e $v=-y^3 \to y=-\sqrt[3]{v}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale

$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=-2 \end{cases}$ .

*Risolvi i seguenti sistemi di grado superiore al secondo*

**82** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^3+y^3=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \end{cases}$

**83** $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^3+y^3-xy=-5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \\ y_1=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \\ y_2=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

**84** $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^3+y^3=-342 \end{cases}$ R. (1;-7), (-7;1)

**85** $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=3 \end{cases}$

**86** $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

**87** $\begin{cases} x^3+y^3=-342 \\ x+y=-6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=1 \end{cases}$

**88** $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

**89** $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

**90** $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

**91** $\begin{cases} x^3+y^3=-35 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

**92** $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

**93** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$

**94** $\begin{cases} x+y=-1 \\ 8\,x^4+8\,y^4=41 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2} \\ y_1=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2} \\ y_2=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

**95** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$ R $\emptyset$

**96** $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

**97** $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

**98** $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. (1;-2), (-2;1), (-1;2), (2;-1)

**99** $\begin{cases} x^5+y^5=64 \\ x+y=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

**100** $\begin{cases} x^5+y^5=-2882 \\ x+y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

**101** $\begin{cases} x^5+y^5=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**102** $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

**103** $\begin{cases} x^4+y^4=337 \\ x\,y=12 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

**104** $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{511}{8} \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=4 \end{cases}$

**105** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

**106** $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x\,y=15 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

**107** $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2+3\,x\,y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

**108** $\begin{cases} x\,y=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

**109** $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2-4\,x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

**110** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=3 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**111** $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x\,y=9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

**112** $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$

**113** $\begin{cases} x^2+y^2+3\,x\,y=10 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**114** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y-2\,x-2\,y=3 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

**115** $\begin{cases} x^2+y^2-6\,x\,y+3\,x+3\,y=2 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3+\sqrt{7} \\ y=-3-\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3-\sqrt{7} \\ y=-3+\sqrt{7} \end{cases}$

**116** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-6 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

**117** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-\dfrac{25}{4} \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ y=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

**118** $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{3} \\ x^5+y^5=-\dfrac{31}{243} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{3} \\ y_1=\dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3} \\ y_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

**119** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=-2 \end{cases}$ R $\emptyset$

**120** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5+7\,xy=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}$

## ►3. Sistemi omogenei di secondo grado

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno tutti i termini con lo stesso grado. I sistemi omogenei di secondo grado sono quindi della forma:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$

**Primo caso: d=0 e d' =0**

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}$

Un sistema di questo tipo ha sempre almeno la soluzione nulla (0; 0).

Per trovare le soluzioni del sistema poniamo $y=tx$

$\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=0 \end{cases}$

Supponendo $x\neq 0$ possiamo dividere le due equazioni per $x^2$, otteniamo due equazioni nell'incognita t che possiamo risolvere: se le due equazioni ammettono qualche soluzione comune allora il sistema ammette soluzione. Le soluzioni sono del tipo x=k e y=kt, dove t è la soluzione comune di cui si è detto prima.

Va poi analizzato a parte il caso x=0.

Esempi

■ $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ -x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$

Applichiamo la sostituzione $y=tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2-3tx^2+2t^2x^2=0 \\ -x^2+5tx^2-6t^2x^2=0 \end{cases}$.

Dividendo per $x^2$ otteniamo $\begin{cases} 1-3t+2t^2=0 \\ 1-5t+6t^2=0 \end{cases}$.

La prima equazione è risolta per $t_1=1\vee t_2=\frac{1}{2}$. La seconda equazione è risolta per $t_1'=\frac{1}{2}\vee t_2'=\frac{1}{3}$

Le due equazioni hanno una radice in comune $t=\frac{1}{2}$. Pertanto oltre alla soluzione (0;0) il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte come $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{2}k \end{cases}$.

■ $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$

Per mezzo della sostituzione y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2-6tx^2+8t^2x^2=0 \\ x^2+4tx^2-5t^2x^2=0 \end{cases}$

Dividendo per $x^2$ il sistema diventa $\begin{cases} 1-6t+8t^2=0 \\ 1+4t-5t^2=0 \end{cases}$. Risolvendo le due equazioni si trova che non hanno alcuna soluzione in comune, pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla (0; 0).

■ $\begin{cases} -4x^2-7xy+2y^2=0 \\ 12x^2+21xy-6y^2=0 \end{cases}$

Sostituendo y=tx e dividendo per $x^2$ il sistema diventa $\begin{cases} -4-7t+2t^2=0 \\ 12+21t-6t^2=0 \end{cases}$. Le due equazioni hanno le stesse soluzioni, che sono $t_1=4\,;t_2=-\frac{1}{2}$, infatti puoi osservare che la seeconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicandola per -3. Il sistema ammette quindi infinite soluzioni che sono date da

$\begin{cases} x=k \\ y=4k \end{cases};\begin{cases} x=k' \\ y=-\frac{1}{2}k' \end{cases}$. Al variare di k e k' si ottengono tutte le soluzioni del sistema.

**Secondo caso se** $d=0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=d' \end{cases}$ .

Dividiamo per $x^2$ la prima equazione si ha $\begin{cases} a+bt+ct^2=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Si risolve la prima equazione nell'incognita t; si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di x, infine si possono ricavare anche i valori di y.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=0 \\ -x^2+2xy-3y^2=-6 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} 1-t-6t^2=0 \\ x^2(-1+2t-3t^2)=-6 \end{cases}$

La prima equazione ha per soluzioni $t_1=\frac{1}{3}$ e $t_2=-\frac{1}{2}$ .

Sostituendo $t=\frac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x=\pm 3$ da cui $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-1 \end{cases}$

Sostituendo $t=-\frac{1}{2}$ si ottengono le soluzioni $x_1=\frac{2\sqrt{66}}{11}$ e $x_2=\frac{-2\sqrt{66}}{11}$ .

Le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_3=2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_3=-\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases} ; \begin{cases} x_4=-2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_4=\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}$

**Terzo caso se** $d\neq 0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=d \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Dividendo membro a membro le due equazioni, otteniamo $\frac{a+bt+ct^2}{a'+b't+c't^2}=\frac{d}{d'}$

da cui $d'(a+bt+ct^2)=d(a'+b't+c't^2)$ da cui $(cd'-c'd)t^2+(bd'-b'd)t+ad'-a'd=0$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita t. Trovate le soluzioni $t_1$ e $t_2$ dobbiamo poi risolvere i sistemi $\begin{cases} y=t_1x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases} ; \begin{cases} y=t_2x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Esempio

■ $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=-68 \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1+3t-t^2)=-68 \\ x^2(-2+t+3t^2)=88 \end{cases}$ da cui $\frac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2}=-\frac{68}{88}$ , da cui

l'equazione $29t^2+83t-12=0$ . Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $t_1=\frac{4}{29} ; t_2=-3$ .

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi: $\begin{cases} y=\frac{4}{29}x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases} ; \begin{cases} y=-3x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=6 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-6 \end{cases}$ .

Queste sono le uniche soluzioni del sistema.

*Risolvi i seguenti sistemi simmetrici*

**121** $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

**122** $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$

**123** $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ 4x^2-2xy-6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$

**124** $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

**125** $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+2xy-8y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

**126** $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+5xy+6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

**127** $\begin{cases} x^2+7xy+12y^2=0 \\ 2x^2+xy+6y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

**128** $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=0 \\ 2x^2+12xy+16y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4t \\ y=t \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

**129** $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$

**130** $\begin{cases} x^2+4xy=0 \\ x^2+2xy-4y^2-4=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

**131** $\begin{cases} x^2-8xy+15y^2=0 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

**132** $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 \\ x^2-y^2=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

**133** $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2-3xy-y^2=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

**134** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ R. impossibile

**135** $\begin{cases} 6x^2+5xy+y^2=12 \\ x^2+4xy+y^2=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-4\sqrt{6} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=4\sqrt{6} \end{cases}$

**136** $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-4xy+y^2=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

**137** $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

**138** $\begin{cases} x^2-3xy+5y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

**139** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-3xy+y^2=11 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

**140** $\begin{cases} x^2+5xy+4y^2=10 \\ x^2-2xy-3y^2=-11 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

**141** $\begin{cases} 4x^2-xy-y^2=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+2xy-y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

**142** $\begin{cases} x^2-xy-8y^2=-8 \\ x^2-2y^2-xy=16 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

**143** $\begin{cases} x^2-6xy-y^2=10 \\ x^2+xy=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

**144** $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=32 \\ x^2+3y^2-9xy=85 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$

**145** $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=8 \\ 3x^2-y^2+xy=-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=-\dfrac{14}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{14}{3} \end{cases}$

**146** $\begin{cases} x^2+5xy-7y^2=-121 \\ 3xy-3x^2-y^2=-7 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{18}{7} \\ y=-\dfrac{37}{7} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\dfrac{18}{7} \\ y=\dfrac{37}{7} \end{cases}$

**147** $\begin{cases} x^2-5xy-3y^2=27 \\ -2x^2-2y^2+4xy=-50 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\dfrac{34}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{34}{7} \\ y=\dfrac{1}{7} \end{cases}$

**148** $\begin{cases} 9x^2+5y^2=-3 \\ x^2+4xy-3y^2=8 \end{cases}$ R. impossibile

**149** $\begin{cases} 2x^2-4xy-3y^2=18 \\ xy-2x^2+3y^2=-18 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

**150** $\begin{cases} x^2+2xy=-\dfrac{7}{4} \\ x^2-4xy+4y^2=\dfrac{81}{4} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ y=-\dfrac{11}{8} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\dfrac{7}{4} \\ y=\dfrac{11}{8} \end{cases}$

**151** $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16=0 \\ x^2-xy+4y^2-6=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

**152** $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-1=0 \\ x^2-2xy-y^2=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

*Risolvi i seguenti sistemi particolari*

**153** $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $(1;1),(3;-3)$

**154** $\begin{cases} (x-2y)(x+y-2)=0 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$ R. $(3;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

**155** $\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(1;0),(-3;-2)$

**156** $\begin{cases} (x-3y)(x+5y-2)=0 \\ (x-2)(x-y+4)=0 \end{cases}$ R. $(2;0),\left(2;\frac{2}{3}\right);(-6;-2);(-3;1)$

**157** $\begin{cases} (x^2-3x+2)(x+y)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ doppia; $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

**158** $\begin{cases} (x-y)(x+y+1)(2x-y-1)=0 \\ (x-3y-3)(x+y-2)=0 \end{cases}$ R. $(0;-1)$ doppia $;\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right);(1;1)$ doppia

**159** $\begin{cases} (4x^2-9y^2)(x^2-2xy+y^2-9)=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ R. $(5;8);\left(\frac{3}{2};1\right);(-1;-4);\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$

**160** $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4=0 \\ (x^2-y^2)(2x-y-4)=0 \end{cases}$ R. $(1;-1),(2;0),(-1;1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right)$

**161** $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 \\ (x+y)(x-3)=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$ doppia $,\left(3;-\frac{3}{2}\right);(3;\frac{3}{4})$

**162** $\begin{cases} (2x^2-3xy+y^2)(x-y-1)=0 \\ (x^2-4xy+3y^2)(12x^2-xy-y^2)=0 \end{cases}$ R. $(t;t),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**163** $\begin{cases} (x-2y-2)(x^2-9y^2)=0 \\ (4x^2-4xy+y^2)(y+2)(x-y)=0 \end{cases}$ $(0;0)$ tripla $,(-2;-2)$ doppia $,\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ doppia $,(6;-2),(-6;-2)$

**164** $\begin{cases} x^4-y^4=0 \\ x^2-(y^2-6y+9)=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

**165** $\begin{cases} (y^2-4y+3)(x^2+2x-15)=0 \\ (x^2-3xy+2y^2)(9x^2-6xy+y^2)=0 \end{cases}$

R. $(1;1),(2;1)(3;3)$ doppia $,(6;3),\left(\frac{1}{3};1\right),(1;3),(-5;-5),\left(-5;-\frac{5}{2}\right),\left(3;\frac{3}{2}\right),(-5;-15),(3;9)$

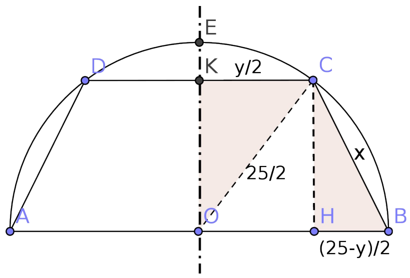
**166** $\begin{cases} (x-y)(x+4y-4)(x+y-1)(3x-5y-2)=0 \\ (3x+y-3)(x^2-4y^2)=0 \end{cases}$

R. $(0;0)$ doppia $,\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),(1;0),\left(\frac{8}{11,}\frac{9}{11}\right),\left(\frac{17}{18};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right),(-4;2)(2;-1),\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{11};-\frac{2}{11}\right),(4;2)$

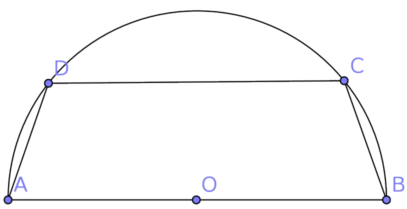
## ►4. Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

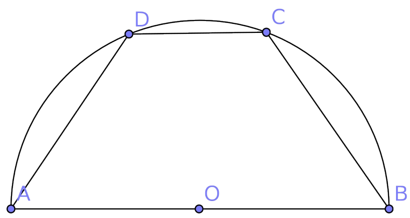
Riprendiamo un problema già trattato nel capitolo secondo di questo volume, per notare come questo problema, come altri nella loro formalizzazione sono risolvibili con sistemi di secondo grado.
Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico delle relazioni che coinvolgono i dati del problema. Utilizzeremo per questo problema anche un'altra strategia risolutiva, per evidenziare che non esiste un solo modo per risolvere un problema..

Problema
Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB$ di misura $25(cm)$; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è $62(cm)$.

| Dati | Vincoli | Relazioni tra dati e incognite | |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}=25$<br>$2p=62$<br>$\overline{AB}\parallel\overline{DC}$<br>$\overline{AD}\equiv\overline{CB}$<br><br>Obiettivo<br>$?\overline{CB}$<br>$?\overline{DC}$<br><br>Incognite<br>$\overline{CB}=x$<br>$\overline{DC}=y$ | $\begin{cases}0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2}\\0<y<25\end{cases}$<br><br>Altre Informazioni<br>$\overline{KO}=\overline{CH}$<br>$\overline{CO}=\frac{25}{2}$<br>$\overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2}$<br>$\overline{HB}=\frac{25-y}{2}$<br>$\widehat{CKO}=90°$<br>$\widehat{CHB}=90°$ | $\begin{cases}y+2x+25=62\\\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2\end{cases}$<br>$\begin{cases}y=-2x+37\\x^2-25x+150=0\end{cases}$<br><br>Soluzioni<br>$\begin{cases}x_1=15\\y_1=7\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=10\\y_2=17\end{cases}$<br><br>Verifica<br>Entrambe le soluzioni sono accettabili |  |

La risoluzione del problema si basa oltre che sulla equazione di primo grado $y+2x+25=62$ che definisce il perimetro e sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele insieme all'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli $CKB$ e $CHB$ rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità la lasciamo al lettore.
Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche per la $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo e per la $y<25$ perché la base minore sia realmente minore.
L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzione, che nel nostro caso sono entrambe accettabili.
Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62(cm), come rappresentato in figura.



Problema

L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per gli operai (tutti con lo stesso stipendio) 800 € al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di 2 € al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di 200 €. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

Dati

- Spesa per salari al giorno= 800 €
- Riduzione salario giornaliero= 2 €
- Riduzione numero operai= 5 *unità*
- Risparmio a seguito del licenziamento e della riduzione di stipendio= 200 €

Obiettivo

- Numero operai occupati prima della ristrutturazione

Incognite

- $x$ = numero operai prima della ristrutturazione
- $y$ = salario percepito prima della ristrutturazione

Vincoli

- $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Altre Informazioni

- Numero operai dopo la ristrutturazione= $x-5$
- Salario dopo la ristrutturazione= $y-2$
- Spesa per stipendi dopo la ristrutturazione= $800-200=600$ €

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} xy=800 \\ (x-5)(y-2)=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ xy-2x-5y+10=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ 2x+5y=210 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=25 \\ y_1=32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=80 \\ y_2=10 \end{cases}$$

Verifica

Entrambe le soluzioni sono accettabili

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32 €/giorno di salario al giorno o 10 €/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Basterebbe per questo un vincolo che ci dice qual'è la paga minima giornaliera di un operaio.

Problema

Un numero $k \in \mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera $k$ di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero $k$. Trovare $k$.

Dati

- Il numero $k$ è composto da tre cifre
- Prodotto delle tre cifre = 42
- Scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia, il numero $l$ che si ottiene è uguale a $k+360$
- Scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, il numero $m$ che si ottiene è uguale a $k-99$

Obiettivo

- Trovare il numero $k$

Incognite

- $x$ = cifra che rappresenta il numero delle centinaia
- $y$ = cifra che rappresenta il numero delle decine
- $z$ = cifra che rappresenta il numero delle unità

Vincoli

$$\begin{cases} x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ y, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Altre Informazioni

- $k=100x+10y+z$
- $l=100y+10x+z$
- $m=100z+10y+x$

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+360 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ x-y=-4 \\ x-z=1 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \\ z_1=2 \end{cases}$$

Verifica

La soluzione soddisfa le condizioni il numero cercato è 372

**167** In un rettangolo la differenza tra i due lati è uguale a $2\,cm$ . Se si diminuiscono entrambi i lati di 1 cm si ottiene un'area di $0{,}1224\,m^2$ . Calcolare il perimetro del rettangolo. R. $[2p=144\,cm]$

**168** Trova due numeri sapendo che la somma tra i loro quadrati è 100 e il loro rapporto 3/4.
R. $[(-6;-8)\vee(6{,}8)]$

**169** La differenza tra due numeri è 11/4 e il loro prodotto 21/8. Trova i due numeri. R. (-3/4; -7/2), (7/2;3/4)

**170** Trovare due numeri positivi sapendo che la metà del primo supera di 1 il secondo e che il quadrato del secondo supera di 1 la sesta parte del quadrato del primo. R. $[(12;5)]$

**171** Data una proporzione tra numeri naturali conosciamo i due medi che sono 5 e 16. Sappiamo anche che il rapporto tra il prodotto degli estremi e la loro somma è uguale a 10/3. Trovare i due estremi. R. $[(4;20)\vee(20{,}4)]$

**172** La differenza tra un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 36. La differenza tra il prodotto delle cifre e la loro somma è uguale a 11. Trovare il numero. R. $[73]$

**173** Oggi la differenza delle età tra un padre e una figlia è 26 anni, mentre due anni fa il prodotto delle loro età era 56. Determina l'età del padre e della figlia. R. $[30;4]$

**174** La somma delle età di due fratelli oggi è 46 anni, mentre fra due anni la somma dei quadrati delle loro età sarà 1250. Trova l'età dei due fratelli. R. $[23;23]$

**175** Ho comprato due tipi di vino. In tutto 30 bottiglie. Per il primo tipo ho speso 54 € e per il secondo 36€. Il prezzo di una bottiglia del secondo tipo costa 2,5 € in meno di una bottiglia del primo tipo. Trova il numero delle b ottiglie di ciascun tipo che ho acquistato e il loro prezzo unitario.
R. $[I\ tipo=12\,bottiglie\,;\,II\ tipo=18\,bottiglie]$

**176** In un triangolo rettangolo di area $630\,m^2$ , l'ipotenusa misura $53\,m$ . Determinare il perimetro $[2p=126\,m]$ .

**177** Un segmento di $35\,cm$ viene diviso in due parti. La somma dei quadrati costruiti su ciascuna delle due parti è $625\,cm^2$ . Quanto misura ciascuna parte? R. $[15\,cm\ \text{e}\ 20\,cm]$ .

**178** Se in un rettangolo il perimetro misura 16,8 m. e l'area 17,28 mq, quanto misura la sua diagonale? R. $[Diagonale=6\,m]$

**179** In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 10,5 cm, mentre l'ipotenusa è 7,5 cm. Trovare l'area. R. $[Area=13{,}5\,cm^2]$

**180** Quanto misura un segmento diviso in due parti, tali che una parte è 3/4 dell'altra, sapendo che la somma dei quadrati costruiti su ognuna delle due parti è uguale a $121\,cm^2$ ? R. $[15{,}4\,cm]$

**181** Un trapezio rettangolo con area di $81\,m^2$ la somma della base minore e dell'altezza è $12\,cm$ mentre la base minore è 1/5 della base maggiore. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $2p_1=42\vee 2p_2=57+3\sqrt{145}$

**182** La differenza tra le diagonali di un rombo è $8\,cm$ , mentre la sua area è $24\,cm^2$ . Determinare il lato del rombo. R. $[2\sqrt{10}]$

**183** Sappiamo che in un trapezio rettangolo con area di $40\,cm^2$ la base minore è $7\,cm$ , mentre la somma della base maggiore e dell'altezza è $17\,cm$ . Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $[2p=24+2\sqrt{13}]$

**184** Nella produzione di un oggetto la macchina A impiega 5 minuti in più rispetto alla macchina B. Determinare il numero di oggetti che produce ciascuna macchina in 8 ore se in questo periodo la macchina A ha prodotto 16 oggetti in meno rispetto alla macchina B. $[A=32\,oggetti\,,\,B=48\,oggetti]$

**185** Un rettangolo ha l'area equivalente a quella di un quadrato. L'altezza del rettangolo è $16\,cm$ , mentre la sua base è di $5\,cm$ maggiore del lato del quadrato. Determinare il lato del quadrato.
R. $[20\,cm]$

**186** La differenza tra cateto maggiore e cateto minore di un triangolo rettangolo è $7\,k$ , mentre la sua area è $60\,k^2$ . Calcola il perimetro. (k>0)
R. $[2p=40\,k]$

**187** L'area di un rettangolo che ha come lati le diagonali di due quadrati misura $90\,k^2$ . La somma dei lati dei due quadrati misura $14\,k$ . Determinare i lati dei due quadrati. (k>0) R. $[5\,k\,,\,9\,k]$

**188** Nel rettangolo ABCD la differenza tra altezza e base è $4\,k$ . Se prolunghiamo la base ab, dalla parte di B di $2\,k$ fissiamo il punto E. L'area del trapezio AECD che si ottiene congiungendo E con C è $28\,k^2$ . Trovare il perimetro del trapezio. (k>0)
R. $[15+k\sqrt{53}]$

**189** In un triangolo isoscele la base è 2/3 dell'altezza. La sua area misura $12\,k^2$ . Trova il perimetro del triangolo.
R. $[4+4\,k\sqrt{10}]$

## Autori

Francesco Daddi: teoria, esercizi
Riccardo Sala: teoria
Claudio Carboncini: teoria, editing
Anna Cristina Mocchetti: correzioni
Lucia Rapella: correzioni
Antonio Bernardo: coordinamento

## Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica $C^3$ o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

## Versione del documento

Versione 2.1 del 10.07.2012