MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Alvaro Tapia, *Skateboard*
http://www.flickr.com/photos/foto_saiker/3087292011/

Indice

►1. L'equazione di terzo grado, un po' di storia

Problema

Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20.

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera Flos.
Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado $x^3+2x^2+10x=20$; Fibonacci pervenne al valore approssimato $x=1{,}3688$ come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.
Solo tra il 1540 e il 1545, ad opera dei matematici italiani Niccolò Fontana detto Tartaglia e Gerolamo Cardano, fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado per le equazioni che si presentano nella forma $x^3=px+q$.
In realtà una qualsiasi equazione di terzo grado può essere ricondotta a quella forma. Partendo da una equazione completa di terzo grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ con la sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ si arriva alla forma $y^3+py+q=0$ alla quale si applica la formula $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ … .

Esempio

- $x^3+3x^2+6x+5=0$

La sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ in questo caso diventa $x=y-1$. Con questa sostituzione l'equazione diventa $(y-1)^3+3(y-1)^2+6(y-1)+5=0$. Semplificando diventa $y^3+3y+1=0$. Applicando la formula risolutiva precedente si ha $y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ da cui $x=y-1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-1$

Esempio

Vogliamo risolvere l'equazione $x^3=15x+4$, nota come equazione di Raffaele Bombelli, matematico bolognese del XVI secolo. Bombelli la risolse attraverso passaggi che coinvolgono radici quadrate di numeri negativi che come hai studiato non esistono in campo reale.
Vediamo come possiamo determinare l'I.S. con le nostre conoscenze.
Scriviamo l'equazione nella forma canonica $p(x)=0$: $x^3-15x-4=0$ e serviamoci del teorema di Ruffini per determinarne uno zero intero. Sappiamo che gli eventuali zeri interi si trovano tra i divisori del termine noto, quindi possiamo provare con $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.
Si ottiene $p(4)=0$ dunque $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(\ldots\ldots)=0$, il fattore da calcolare sarà di secondo grado e sarà determinato con la divisione di $p(x)=x^3-15x-4$ con il binomio $x-4$.
Eseguendo la divisione si ottiene: $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(x^2+4x+1)=0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto, $x-4=0 \rightarrow x=4 \ \vee \ x^2+4x+1=0 \rightarrow \emptyset$. L'ultima equazione non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo $(\Delta=\ldots\ldots)$
L'equazione assegnata ammette quindi una sola soluzione reale x=4 e due soluzioni complesse.

Poco dopo la scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo grado il matematico italiano Ferrari trovò anche la formula per risolvere le equazioni di quarto grado. Le ricerche per trovare la formula che risolvesse l'equazione di quinto grado furono invece vane, non perché i matematici non furono abbastanza 'ingegnosi' bensì per il fatto che, come dimostrò Galois non esistono formule che per mezzo di radici ed altre operazioni algebriche possano risolvere le equazioni dal quinto grado in poi. In altre parole esistono solo formule per le equazioni di secondo, terzo e quarto grado.
Oggigiorno, tuttavia, si preferisce non approfondire le applicazioni di queste formule. Si usa applicare solo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e per quelle di grado superiore al secondo si applicano i metodi che vedremo in questo capitolo oppure si preferisce applicare metodi di calcolo numerico che danno le soluzioni per approssimazioni successive.

►2. Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'Insieme Soluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

DEFINIZIONE. Un'equazione algebrica si presenta nella forma $p(x)=0$ dove $p(x)$ è un polinomio nella variabile x, di grado n, a coefficienti reali: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Esempio

■ Determinare le radici reali dell'equazione $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:

$p(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 4x\cdot(x^2-1) + (x^2-1) = (x^2-1)\cdot(4x+1)$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene $\begin{cases} x^2-1 \rightarrow x=-1 \vee x=1 \\ 4x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4} \end{cases}$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e $I.S.=\left\{-1\,;1\,;-\frac{1}{4}\right\}$.

■ $\frac{2x+3}{2x+1} + \frac{x^2}{x+1} = 5x+3$

L'equazione assegnata è frazionaria

Riduciamo allo stesso denominatore $\frac{2x^2+5x+3+2x^3+x^2-10x^3-15x^2-5x-6x^2-9x-3}{(2x+1)\cdot(x+1)}=0$

Poniamo le Condizioni d'Esistenza $x\neq-\frac{1}{2} \wedge x\neq-1$

Eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili; si ottiene un'equazione di terzo grado $8x^3+18x^2+9x=0$

Scomponiamo in fattori il polinomio $x\cdot(8x^2+18x+9)=0$

Per la legge di annullamento $x=0 \vee x^2+18\text{x}+9=0$. Risolvendo anche l'equazione di secondo grado si ottengono le soluzioni $x=0 \vee x=-\frac{3}{4} \vee x=-\frac{3}{2}$

Osservazione. Si dimostra che un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali e distinte, coincidenti o non reali, quante ne indica il suo grado.

Ricordiamo che uno **zero di un polinomio** è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero. L'obiettivo posto viene raggiunto ponendo il polinomio uguale a zero, come nell'esempio:

■ *Trovare gli zeri reali dei seguenti polinomi di terzo grado* $p(x)=x^3-7x^2+4x+12$.

Scriviamo l'equazione $x^3-7x^2+4x+12=0$ e cerchiamo di scomporre con il metodo di Ruffini.

Sostituendo x=-1 si ottiene $(-1)^3-7(-1)^2+4(-1)+12=-1-7-4+12=0$. Possiamo allora dividere il polinomio $x^3-7x^2+4x+12=0$ per il binomio x+1. Applicando la regola di Ruffini si ha

```
    1  -7  +4  +12
-1     -1  +8  -12
    1  -8  +12  //
```

Il polinomio si scompone in $(x+1)(x^2-8\text{x}+12)$. Per la legge di annullamento del prodotto

$x+1=0 \vee x^2-8\text{x}+12=0$. L'equazione x+1=0 dà come soluzione x=-1. L'equazione

$x^2-8\text{x}+12=0$ si può risolvere con la formula risolutiva ridotta $x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$

Le tre soluzioni sono allora -1; 2; 6.

Trova gli zeri del polinomio

1 $p(x)=x^3+5x^2-2x-24$ R. -4; -3; 2

2 $p(x)=6x^3+23x^2+11x-12$ R. 1/2; -3; -4/3

3 $p(x)=8x^3-40x^2+62x-30$ R. 5/2; 1; 3/2

4 $p(x)=x^3+10x^2-7x-196$ R. 4; -7

5 $p(x)=x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{17}{3}x-2$ R. $I.S.=\left\{-3,-\frac{1}{3},+2\right\}$

6 $p(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{38}{3}x+\frac{56}{3}$ R. $I.S.=\left\{-4,+\frac{7}{3},+2\right\}$

7 $p(x)=3x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ R. $I.S.=\left\{0,+\frac{1}{2},+1\right\}$

8 $p(x)=3x^3-9x^2-9x-12$ R. $I.S.=\{+4\}$

9 $p(x)=\frac{6}{5}x^3+\frac{42}{5}x^2+\frac{72}{5}x+12$ R. $I.S.=\{-5\}$

10 $p(x)=4x^3-8x^2-11x-3$ R. 3; -1/2

11 $p(x)=\frac{3}{2}x^3-4x^2-10x+8$ R. $I.S.=\left\{4,\frac{2}{3},-2\right\}$

12 $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ R. 2; -1/2

13 $p(x)=-3x^3+9x-6$ R. $I.S.=\{1,-2\}$

14 $p(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4$ R. $I.S.=\{2\}$

15 $p(x)=4x^3+4x^2-4x-4$ R. $I.S.=\{1,-1\}$

16 $p(x)=-\frac{2}{5}x^3+\frac{8}{5}x^2+\frac{14}{5}x-4$ R. $I.S.=\{5,1,-2\}$

17 $p(x)=-6x^3-30x^2+192x-216$ *R.* $I.S.=\{2,-9\}$

18 $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ *R.* $\pm 1;2$

19 $P(x)=9x^3-7x+2$ *R. -1; 1/2; 2/3*

20 $P(x)=x^3-7x^2+4x+12$ *R. 2; -1; 6*

21 $P(x)=x^3+10x^2-7x-196$

22 $P(x)=400x^3-1600x^2=400x-1600$

23 $p(x)=x^6-5x^5+6x^4+4x^3-24x^2+16x+32$

24 $P(x)=8x^3-14ax^2-5a^2x+2a^3=0$

25 $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

26 $P(x)=3x^5-19x^4+42x^3-42x^2+19x-3=0$

27 $ax^3-(a^2+1-a)x^2-(a^2+1-a)x+a=0$

Determinare l'I.S. delle equazioni

28 $x^3-3x+2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

29 $x^3+2x^2+2x+1=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

30 $x^3-6x+9=0$ R. $I.S.=\{-3\}$

31 $x^4-2x^2+1=0$

32 $x^3+3x^2-x-3=0$

33 $6x^3-7x^2-x+2=0$

34 $x^3-6x^2+11x-6=0$

35 $x^3-2x^4=0$

36 $x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$ R. 2; -2; 3

37 $x^5+1=x\cdot(x^3+1)$ R. $I.S.=\{-1;+1\}$

38 $\dfrac{x^3+2-x\cdot(2x+1)}{2x-1}=0$ R. $I.S=\{-1;1;2\}$

39 $2x^2-2x+3(x-1)=2x(2x^2-1)$ R. $I.S.=\{-1\}$

40 $(3x+1)^2=x(9x^2+6x+1)$ R. -1/3; 1

41 $(x+1)(x^2-1)=(x^2+x)(x^2-2x+1)$ R. $I.S.=\{\pm 1;1\pm\sqrt{2}\}$

42 $(x-1)(x^2+x+1)=x(2-3x)+5$ R. $I.S.=\{-3;\pm\sqrt{2}\}$

43 $x^3+4x^2+4x=x^2-4$ R. $I.S.=\{-2\}$

44 $\sqrt{3}\ x^4-\sqrt{27}\ x^2=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};0;+\sqrt{3}\}$

45 $(x+1)^3-(x-1)^3=8$

46 $\sqrt{2}x^3-(1-2\sqrt{2})x^2-x=0$ R. $0;\sqrt{2}-1;-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$

47 $64x^7=27x^4$

48 $(x^2-4x)^{2011}=-(4x-x^2)^{2011}$

49 $x^7-x^6+\sqrt{27}x^5=0$ R $I.S.=\{0\}$

50 $3x^4-14x^3+20x^2-8x=0$ R. 0; 2/3; 2

51 $\dfrac{3x-1}{x^2}=1-2x+\dfrac{1}{x}$ R. $I.S.=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

52 $\dfrac{x-1}{x^2+5x+4}-\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{3}{2(x^2-1)}=0$ R. $I.S.=\left\{-\dfrac{3}{2};-2\right\}$

53 $\dfrac{x^2-3x}{2x}-\dfrac{x-2}{x-1}=0$ R. $0;3\pm\sqrt{2}$

54 $\dfrac{x(x-1)}{x+1}=\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$ R. $I.S.=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

55 $\dfrac{1}{x^4-4}=\dfrac{3}{x^4-16}$ R. $I.S.=\emptyset$

56 $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{1}{4-x^2}+\dfrac{1}{x^4-3x^2-4}$ R. $\pm 1;\pm\sqrt{2}$

57 $\dfrac{x^4-4x^2+9}{x^4-3x^2+2}-\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$ R. $\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$

58 $(x^2-1)^3+7x^3=3x(4-x-x^3)-(x-2)^3$ R. $1;-\sqrt[3]{9}$

59 $\dfrac{x^2-1}{x^2-3}-\dfrac{x^2-3}{1-x^2}=\dfrac{10}{3}$ R. $0;\pm 2$

►3. Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione del tipo $a\,x^n+b=0$ con $a\neq 0$ e con $n\in\mathbb{N}_0$.
L'equazione così scritta è detta ***forma normale*** dell'equazione.
Dobbiamo distinguere i casi:

- $b\neq 0$
  - se n è pari l'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte se e solo se i due parametri a e b sono discordi: $x_1=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ e $x_2=-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;
  - se n è dispari l'equazione ha un'unica soluzione reale $x_1=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.
- $b=0$
  l'equazione è $a\,x^n=0$ e le n soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione $x=0$. In questo caso si dice che l'unica soluzione $x=0$ ha molteplicità n .

Esempi

■ $3\,x^4-8=0$.

L'esponente n è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte: $x_1=\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$ e $x_2=-\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$.

Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori:
$3\,x^4-8=0\ \rightarrow\ \left(\sqrt{3}\,x^2+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\,x^2-\sqrt{8}\right)=0$ e per la legge di annullamento del prodotto
$\left(\sqrt{3}\,x^2+\sqrt{8}\right)=0\ \vee\ \left(\sqrt{3}\,x^2-\sqrt{8}\right)=0$ la prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda
$\left(\sqrt{3}\,x^2-\sqrt{8}\right)=0\ \rightarrow\ x^2=\sqrt{\frac{8}{3}}\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}}\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$

■ $-6\,x^4+9=13$

Riducendo alla forma normale troviamo $-6x^4-4=0$; moltiplicando ambo i membri per -1 si ottiene $6\,x^4+4=0$ in cui il primo membro è una somma di numeri sempre positivi sempre maggiore di 4, quindi in $\mathbb{R}$ l'equazione è impossibile e $I.S.=\emptyset$.

■ Determinare in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione: $8\,x^3+3=4$

Riduciamo l'equazione alla forma normale $8\,x^3+3=4\ \rightarrow\ 8\,x^3-1=0$. Essendo di grado dispari, l'unica soluzione è $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$. Allo stesso risultato perveniamo se scomponiamo in fattori la differenza di cubi:
$8\,x^3-1=0\ \rightarrow\ (2\,x-1)\cdot\left(4\,x^2+2\,x+1\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto
$2\,x-1=0\ \rightarrow\ x=\frac{1}{2}\ \vee\ 4\,x^2+2\,x+1=0$ l'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali essendo $\Delta<0$. Pertanto l'unica soluzione è $I.S.=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

■ $2\,x^7+3=2$

In forma normale si ha $-2\,x^7+1=0$ e si trova così l'unica soluzione reale $x=\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$.

■ $3\,x\cdot\left(x^2+1\right)=4\cdot(1+x)-(7\,x+4)$

Sviluppando i calcoli $3\,x^5=0\ \rightarrow\ x^5=0\ \rightarrow\ x=0$ che ha una sola soluzione reale con molteplicità 5 .

■ $x^3+3=0$

L'equazione ha l'unica soluzione reale $x=-\sqrt[3]{3}$. Spieghiamo il risultato scomponendo la somma di cubi $(x)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=0\ \rightarrow\ \left(x+\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(x^2-x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)=0$ per la legge di annullamento del prodotto $\left(x+\sqrt[3]{3}\right)=0\ \rightarrow\ x=-\sqrt{3}\ \vee\ x^2-\sqrt[3]{3}\ x+\sqrt[3]{3^2}=0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta<0$.

Determinate le soluzioni reali delle seguenti equazioni:

60	$-2x^3+16=0$	$x^5+15=0$	R. $I.S.=\{2\}$; $I.S.=\{-\sqrt[5]{15}\}$
61	$x^4+16=0$	$-2x^4+162=0$	R. $I.S.=\emptyset$; $I.S.=\{-3;+3\}$
62	$-3x^6+125=0$	$81x^4-1=0$	R. $I.S.=\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{3}}\right\}$ $I.S.=\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$
63	$27x^3+1=0$	$81x^4-1=0$	R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; $I.S.=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$
64	$81x^4-1=0$	$\frac{16}{x^4}-1=0$	R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3},+\frac{1}{3}\right\}$; $I.S.=\{-2;+2\}$
65	$x^6-1=0$	$8x^3-27=0$	R. $I.S.=\{-1;1\}$; $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$
66	$x^5-1=0$	$x^4+81=0$	R. $I.S.=\{1\}$; $I.S.=\emptyset$
67	$x^4-4=0$	$3x^5+96=0$	R. $I.S.=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ $I.S.=\{-2\}$
68	$49x^6-25=0$	$\frac{1}{x^3}=27$	R. $I.S.=\left\{-\sqrt[3]{\frac{5}{7}},\sqrt[3]{\frac{5}{7}}\right\}$; $I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$
69	$x^4-10000=0$	$100000x^5+1=0$	
70	$x^6-64000000=0$	$x^4+625=0$	
71	$8x^3-27=0$	$8x^3+9=0$	
72	$81x^4-16=0$	$16x^4-9=0$	
73	$\frac{8}{x^3}-125=0$	$\frac{81}{x^3}=27$	
74	$81x^4=1$	$x^3-\frac{1}{27}=0$	
75	$\frac{x^6}{64}-1=0$	$\frac{64}{x^6}=1$	
76	$x^6=6$	$x^{10}+10=0$	
77	$x^{100}=0$	$10x^5-10=0$	
78	$\frac{1}{81}x^4-1=0$	$\frac{1}{x^4}-81=0$	
79	$\sqrt[3]{2}\,x^6=\sqrt[3]{24}$	$\frac{3}{5}x^3=\frac{25}{9}$	R. $I.S.=\left\{\pm 2^{\frac{1}{9}}\cdot 3^{\frac{1}{18}}\right\}$
80	$x^8-256=0$	$x^{21}+1=0$	
81	$\frac{1}{243}x^5+1=0$	$x^3+3\sqrt{3}=0$	R. $I.S.=\{-3\}$; $I.S.=\{\sqrt[6]{27}\}$
82	$6x^{12}-12=0$	$\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=0$	
83	$\sqrt{3}\,x^3-3\sqrt[3]{3}=0$	$\frac{x^4}{9}-\frac{9}{25}=0$	R. $I.S.=\left\{3^{\frac{5}{18}}\right\}$; $I.S.=\left\{\pm 3\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
84	$(x-1)^4=16$	$(x^2-1)^3-27=0$	
85	$\frac{3}{x^4-1}=\frac{5}{x^4+1}$		
86	$\frac{x^4(x^2+2)-5}{x^2-1}=2(x^2+1)$		

►4. Equazioni trinomie

Un'equazione *trinomia* è un'equazione con tre termini del tipo $x^4-5x^2+4=0$, $x^6-4x^3+3=0$, $x^{10}-x^5+6=0$. In generale si presentano nella forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$ dove n è un intero positivo e dove i coefficienti a e b sono non nulli.
Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo $t=x^n$ l'equazione trinomia diventa di secondo grado: $at^2+bt+c=0$ e da questa, detta per evidenti motivi *equazione risolvente*, si ricavano i valori di t . Successivamente, dalla relazione $t=x^n$, si ricavano i valori di x .
Attraverso alcuni esempi vedremo come procedere alla ricerca dell'I.S.

Equazione biquadratica

Se **n = 2** l'equazione è detta **biquadratica** e si presenta nella forma $ax^4+bx^2+c=0$.

Esempio

■ $x^4-5x^2+4=0$

L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognita ponendo $x^2=t$;
l'equazione diventa $t^2-5t+4=0$ che ha due soluzioni reali distinte $t_1=1 \vee t_2=4$.
Per determinare le soluzioni dell'equazione assegnata teniamo conto della sostituzione fatta:

$$\begin{cases} \text{da } t_1=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x_1=-1 \vee x_2=+1 \\ \text{da } t_2=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_1=-2 \vee x_2=+2 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e $I.S.=\{-1;+1-2;+2\}$.

■ $2x^4+3x^2-2=0$

L'equazione è biquadratica, ponendo $x^2=t$ diventa $2t^2+3t-2=0$ che ha per soluzioni $t_1=-2 \vee t_2=\frac{1}{2}$. Ritornando alla sostituzione iniziale:

$$\begin{cases} \text{da } t_1=-2 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow I.S.=\dots\dots\dots \\ \text{da } t_2=\frac{1}{2} \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x_1=\dots\dots \vee x_2=\dots\dots \rightarrow \text{razionalizzando } x_1=\dots\dots \vee x_2=\dots\dots \end{cases}$$

■ $x^4-\frac{16}{9}x^2=0$

E' biquadratica incompleta; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo x^2 a fattore comune e per la legge di annullamento del prodotto possiamo concludere $x^2=0 \vee x^2=\dots\dots\dots$ da cui $I.S.=\{\dots\dots\dots\}$

Conclusione

L'equazione biquadratica $ax^4+bx^2+c=0$

- ha quattro soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risultano positivi anche i rapporti $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ che indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle sue soluzioni. Infatti … … ...
- ha due soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione è positivo e se risulta negativo il rapporto $\frac{c}{a}$ che indica il prodotto delle sue soluzioni. Infatti … … …
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione è positivo e se risulta positivo il rapporto $\frac{c}{a}$ e negativo il rapporto $-\frac{b}{a}$. Infatti … … ...
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione è negativo.

Per stabilire il numero di soluzioni di un'equazione biquadratica si può anche utilizzare la regola dei segni di Cartesio:

- $\Delta>0$ e due variazioni si hanno 4 soluzioni reali
- $\Delta>0$ 1 permanenza e 1 variazione si hanno 2 soluzioni reali
- $\Delta=0$ $-\frac{b}{2a}>0$ si hanno due soluzioni reali; $-\frac{b}{2a}<0$ nessuna soluzione reale
- $\Delta<0$ nessuna soluzione reale.

Determinare l'I.S. delle seguenti equazioni biquadratiche:

87 $x^4-13x^2+36=0$ R. $I.S:=\{-3;3;2;-2\}$

88 $2x^4-20x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-1;1;3;-3\}$

89 $x^4-\frac{37}{9}x^2+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

90 $x^4-\frac{13}{3}x^2+\frac{4}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

91 $-x^4+\frac{17}{4}x^2-1=0$ R. $I.S.=\left\{-2;2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

92 $-2x^4+\frac{65}{2}x^2-8=0$ R. $I.S:=\left\{-4;4;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

93 $-2x^4+82x^2-800=0$ R. $I.S:=\{-4;4;-5;5\}$

94 $-3x^4+\frac{85}{3}x^2-12=0$ R. $I.S:=\left\{-3;3;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

95 $x^4-\frac{16}{3}x^2+\frac{16}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

96 $x^4-7x^2+6=0$ R. $I.S:=\{-1;1;-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

97 $x^4-10x^2+16=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$

98 $-3x^4+9x^2+12=0$ R. $I.S:=\{-2;2\}$

99 $-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-3;3\}$

100 $x^4+\frac{15}{4}x^2-1=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

101 $-8x^4-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$

102 $-16x^4-63x^2+4=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\}$

103 $x^4-2x^2-15=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$

104 $x^4-2x^2-3=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

105 $x^4-8x^2+16=0$

106 $8x^2+\frac{6x^2+x-4}{x^2-1}=4-\frac{3+4x}{1+x}$ R. $I.S.=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\right\}$

107 È vero che l'equazione $4x^4-4=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti?

108 È vero che l'equazione $-x^4+2x^2-1=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti?

109 Perché le seguenti equazioni non hanno soluzioni reali?

A) $x^4+\frac{37}{4}x^2+\frac{9}{4}=0$ B) $x^4-x^2+3=0$ C) $-2x^4-x^2-5=0$ D) $-x^4-5x^2-4=0$

110 Senza risolvere le seguenti equazioni, dire se ammettono soluzioni reali:

A) $2x^4+5x^2-4=0$ B) $2x^4-5x^2+4=0$ C) $x^4-5x^2+1=0$ D) $-4x^4+5x^2-1=0$

R. [si, no, si, no]

111 $x^2\cdot(x^2-2a+1)=a\cdot(1-a)$ per quali valori del parametro a ha quattro soluzioni reali. R. $a>1$

112 È vero che la somma delle radici dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$ è nulla?

113 Verifica le seguenti uguaglianze relative alle soluzioni (reali) dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$:

A) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-\frac{2b}{a}$ B) $x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2\cdot x_4^2=\frac{c}{a}$

Equazioni trinomie con n > 2

Esempi

■ $x^6-4x^3+3=0$

Ponendo $t=x^3$ abbiamo l'equazione risolvente $t^2-4t+3=0$, le cui soluzioni reali sono $t_1=1$, $t_2=3$; per ricavare i valori di x è sufficiente risolvere le due equazioni binomie $x^3=1$ e $x^3=3$, trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata $x_1=1 \vee x_2=\sqrt[3]{3}$

■ $x^8-x^4-2=0$

Ponendo $t=x^4$ arriviamo all'equazione $t^2-t-2=0$ da cui $t_1=2$ e $t_2=-1$; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono: $x^4=2$ e $x^4=-1$, quindi

- $x^4=2 \rightarrow x^2=-\sqrt{2} \vee x^2=+\sqrt{2}$ e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente $x_1=\sqrt[4]{2}$; $x_2=-\sqrt[4]{2}$.
- $x^4=-1$ che non ha soluzioni reali

concludendo: $I.S.=\{-\sqrt[4]{2}\,;+\sqrt[4]{2}\}$

■ $x^{12}+x^6+3=1-2x^6$.

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{12}+3x^6+2=0$; l'equazione non ha soluzioni reali: possiamo infatti osservare che per qualunque valore reale attribuito all'incognita, la somma dei tre termini a primo membro è ≥ 2 e quindi non può essere $=0$. Si osservi d'altra parte che, posto $t=x^6$, si ricavano le soluzioni $t_1=-1$ e $t_2=-2$ entrambe negative e quindi le due equazioni binomie $x^6=-1$ e $x^6=-2$ risultano essere impossibili in $\mathbb{R}$.

■ $x^{10}-x^5+7=1$

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{10}-x^5+6=0$; l'equazione risolvente $t^2-t+6=0$ non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo e quindi $I.S.=\emptyset$

Determinare le soluzioni reali delle seguenti equazioni trinomie

114 $x^6+13x^3+40=0$ R. $I.S:=\{-2\,;-\sqrt[3]{5}\}$

115 $x^8-4x^4+3=0$ R. $I.S:=\{1\,;-1\,;\sqrt[4]{3}\,;-\sqrt[4]{3}\}$

116 $-x^6+29x^3-54=0$ R. $I.S:=\{3\,;\sqrt[3]{2}\}$

117 $\frac{1}{2}x^{10}-\frac{3}{2}x^5+1=0$ R. $I.S:=\{1\,;\sqrt[5]{2}\}$

118 $-3x^{12}-3x^6+6=0$ R. $I.S:=\{1\,;-1\}$

119 $2x^8+6x^4+4=0$ R. $\emptyset$

120 $-x^8-6x^4+7=0$ R. $I.S:=\{1\,;-1\}$

121 $-2x^6+\frac{65}{4}x^3-2=0$ R. $I.S:=\left\{2\,;\frac{1}{2}\right\}$

122 $-\frac{3}{2}x^{10}+\frac{99}{2}x^5-48=0$ R. $I.S:=\{1\,;2\}$

123 $-\frac{4}{3}x^{14}-\frac{8}{9}x^7+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-1\,;\sqrt[7]{\frac{1}{3}}\right\}$

►5. Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

Esempio

- $(x^2-4)^4-1=0$

Sostituendo $t=x^2-4$ l'equazione diventa $t^4-1=0$. È un'equazione binomia che ha per soluzioni $t_1=-1;\ t_2=+1$. Sostituendo questi valori nella relazione $t=x^2-4$ si ha

$$\begin{cases}-1=x^2-4 \to x^2=3 \to x=\pm\sqrt{3} \\ +1=x^2-4 \to x^2=5 \to x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

124 $(x^3+1)^3-8=0$ R. $I.S.=\{1\}$

125 $2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1=0$ sostituire $\frac{x+1}{x-1}=t$ R. $I.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

126 $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+8=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$

127 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{16}{9}$ R. $I.S.=\emptyset$

128 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-16\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ R. $I.S.=\{8-3\sqrt{7};8+3\sqrt{7}\}$

129 $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2-12\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+27=0$ R. $I.S.=\left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{3};\pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$

130 $(2x-1)^3=8$ R. $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

131 $(x+1)^3+6(x+1)^2-(x+1)-30=0$ R. $I.S.=\{-6;-4;1\}$

132 $(x^2+1)^3-4(x^2+1)^2-19(x^2+1)-14=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

133 $\frac{3x}{x+1}-\left(\frac{3x}{x+1}\right)^3=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2}\right\}$

134 $(x-1)^2+\frac{x-3}{(x-1)^2}=\frac{x+6}{(1-x)^2}$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

135 $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+4=0$ R. $I.S.=\left\{0;3,\frac{1}{3}\right\}$

136 $(x^3+2)^5=1$

137 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^4-13\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+36=0$

138 $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4-10\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2+9=0$

139 $(x-\sqrt{2})^6-4(x-\sqrt{2})^3+3=0$

140 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{10}-33\left(\frac{x+1}{x}\right)^5+32=0$

141 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-13+36\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=0$

142 $\frac{x-3}{x+3}+2=15\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

143 $(x^2-1)^3+\frac{8}{(x^2-1)^3}=9$

144 $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3-3\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3-4\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3+12=0$

►6. Equazioni reciproche

Dato un polinomio ordinato, le *coppie di coefficienti equidistanti dagli estremi* sono le coppie costituite dal primo e dall'ultimo coefficiente, dal secondo e dal penultimo, dal terzo e dal terzultimo, ecc. Se il numero dei coefficienti è dispari (ciò accade se il grado del polinomio è pari), per convenzione si considera una coppia di coefficienti equidistanti il termine centrale, contato due volte.

DEFINIZIONI

Un'equazione è detta **reciproca di prima specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **uguali**.

Un'equazione è detta **reciproca di seconda specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **opposti**. In particolare, se $p(x)$ ha grado $2k$ (pari), il coefficiente di x^k è nullo.

- $x^3-2x^2-2x+1=0$ è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie.
- $3x^4+5x^3-4x^2+5x+3=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie.
- $-7x^4+5x^3-5x+7=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie.
- $3x^5+2x^4+6x^3-6x^2-2x-3=0$ è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie.
- $-2x^4+8x^3+3x^2-8x+2=0$ è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni:

TEOREMA (delle radici reciproche). Se λ è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche $\frac{1}{\lambda}$ è radice dell'equazione.

Consideriamo l'equazione reciproca di prima specie $a_0x^n+a_1x^{n-1}++a_2x^{n-2}\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$.

- *Ipotesi*: $x=\lambda$ è una radice dell'equazione;
- *Tesi*: $x=\frac{1}{\lambda}$ è una radice dell'equazione.
- *Dimostrazione*:
  Sappiamo che se $x=\lambda$ è una radice allora è vera l'uguaglianza $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ (*). Sostituiamo $\frac{1}{\lambda}$ al posto della x nel polinomio al primo membro, si ha: $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)+a_0$ che, svolti i calcoli, diventa $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{a_0+a_1\lambda+\ldots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n}{\lambda^n}$.
  Osservando il numeratore notiamo che è proprio quanto scritto in (*) e pertanto, essendo il denominatore diverso da zero, si ha $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$ che dimostra la tesi. C.V.D.

145 Dimostra il teorema per le equazioni di seconda specie.

146 Dopo aver verificato che $x=3$ è radice dell'equazione $3x^3-13x^2+13x-3=0$, verificate che l'equazione ammette come soluzione $x=\frac{1}{3}$.

Analizziamo i metodi risolutivi per le equazioni reciproche.

Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=0$ e hanno $x=-1$ come radice: infatti sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro si ottiene: $p(-1)=a_0(-1)^3+a_1(-1)^2+a_1(-1)+a_0=-a_0+a_1-a_1+a_0=0$.

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per $x+1$; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo allora scrivere $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=(x+1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$ da cui con la legge di annullamento del prodotto possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

Un modo "alternativo" per determinare l'I.S. dell'equazione reciproca $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=0$ consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti a_0 e a_1 : $a_0\left(x^3+1\right)+a_1\left(x^2+x\right)=0$ da cui $a_0(x+1)\left(x^2-x+1\right)+a_1 x(x+1)=0$ e raccogliendo il binomio $(x+1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x+1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$.

Esempio

- $x^3-5x^2-5x+1=0$.

Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è $x=-1$, per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere $(x+1)\left(x^2-6x+1\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x=-1$ già nota e, risolvendo l'equazione $x^2-6x+1=0$ troviamo le altre radici $x_2=3+2\sqrt{2}$ e $x_2=3-2\sqrt{2}$ e quindi $I.S.=\{-1;3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2}\}$.

- $3x^3-5x^2-5x+3=0$

L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di prima specie ammette dunque $x=-1$ come radice.
Infatti $p(-1)=3(-1)^3-5(-1)^2-5(-1)+3=\dots\dots\dots$
Il polinomio al primo membro si può scomporre con la regola di Ruffini

```
    3  -5  -5  +3
-1     -3  +8  -3
    3  -8  +3  //
```

si scompone in $(x+1)\left(3x^2-8x+3\right)=0$; per la legge di annullamento del prodotto avremo
$x+1=0 \rightarrow x=-1$ come già noto oppure
$3x^2-8x+3=0 \rightarrow x_1=\dots\dots \vee x_2=\dots\dots \rightarrow I.S.=\{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$
Verifica che l'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

147	$3x^3+13x^2+13x+3=0$	R. -1; -1/3; +3
148	$2x^3-3x^2-3x+2=0$	R. -1; +2; +1/2
149	$5x^3-21x^2-21x+5=0$	R. -1; +5; -1/5
150	$12x^3+37x^2+37x+12=0$	
151	$10x^3-19x^2-19x+10=0$	
152	$15x^3-19x^2-19x+15=0$	
153	$4x^3+13x^2-13x=4$	
154	$2+2x^3=3x^2+3x$	
155	$3x(10x-19)+9x(x+2)=10(x-1)(x^2+x+1)$	
156	$2x^3-(3\sqrt{2}+2)x^2-(3\sqrt{2}+2)x+2=0$	R. $-1;-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}$
157	$x^3+x^2(2\sqrt{2}+1)+x(2\sqrt{2}+1)+1=0$	R. $-1;-\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}+1$
158	$x^3-3x^2-3x+1=0$	R. $-1;\sqrt{3}+2;2-\sqrt{3}$
159	$ax^3+(a^2+a+1)x^2+(a^2+a+1)x+1$	R. -1; -a; -1/a

Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: ; e $a_0 x^3+a_1 x^2-a_1 x-a_0=0$ hanno $x=1$ come radice, basta verificare sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro: $p(1)=a_0(1)^3+a_1(1)^2-a_1(1)-a_0=a_0+a_1-a_1-a_0=0$.

Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro: $(x-1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_0+a_1)x+a_0\right)=0$ e quindi determinare l'I.S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

Esempi

- $2x^3-7x^2+7x-2=0$

E' un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie, i coefficienti infatti sono opposti a due a due. Una radice è $x_1=1$ e pertanto l'equazione può essere scritta nel modo seguente: $2x^3-2-7x^2+7x=0 \rightarrow 2(x^3-1)-7\mathrm{x}(x-1)=0 \rightarrow 2(x-1)(x^2+x+1)-7\mathrm{x}(x-1) \rightarrow$ $(x-1)(2\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+2-7\mathrm{x})=0 \rightarrow (x-1)\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x=1$ già nota e risolvendo $\left(2x^2-5x+2\right)=0$ si ricavano le altre due radici: $x_2=2$ e $x_3=\frac{1}{2}$ e dunque $I.S.=\left\{1;2;\frac{1}{2}\right\}$.

- $2x^3-9x^2+9x-2=0$

L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di seconda specie perché ha i coefficienti opposti a due a due,e dunque ammette $x=+1$ come radice. Infatti $p(+1)=$……………………

Applichiamo la regola di Ruffini per scomporre in fattori il polinomio di terzo grado.

```
    2 -9   +9 -2
-1     -2 +11 -2
    2 -11 +2 //
```

Il polinomio si scompone in $(x-1)\left(2x^2-\ldots\ldots\ldots\right)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto avremo $x-1=0 \rightarrow x=1$ come già noto oppure $2x^2-\ldots\ldots\ldots=0 \rightarrow x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \rightarrow I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

160 Vero/Falso

a) l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ammette sempre $x=-1$ come soluzione V F

b) se nell'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a=d$ e $b=c$ allora $x=-1$ è una soluzione V F

c) in una equazione reciproca di terzo grado la somma dei coefficienti è nulla V F

d) se in $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a+d=0$ e $b+c=0$ allora $x=1$ appartiene all'I.S. V F

Risolvi le seguenti equazioni dopo aver verificato che sono equazioni reciproche di terzo grado di 2a specie:

161 $6\mathrm{x}^3-19\mathrm{x}^2+19\mathrm{x}-6=0$ R. 1; 2/3; 3/2

162 $7\mathrm{x}^3-57\mathrm{x}^2+57\mathrm{x}-7=0$ R. 1;7; 1/7

163 $3\mathrm{x}^3+7\mathrm{x}^2-7\mathrm{x}-3=0$

164 $12\mathrm{x}^3+13\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}-12=0$

165 $10\mathrm{x}^3+19\mathrm{x}^2-19\mathrm{x}-10=0$

166 $x^3+3\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-1=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1\}$

167 $\frac{x^3-1}{x}=\frac{21}{4}\cdot(1-x)$

168 $5\mathrm{x}^3+(6\sqrt{5}-5)x^2+x(5-6\sqrt{5})-5=0$ R. $1;-\sqrt{5};-\frac{\sqrt{5}}{5}$

169 $x^3+13\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}-1=0$ R. $1;-7-4\sqrt{3};-7+4\sqrt{3}$

170 $4\mathrm{x}^3+(5\sqrt{5}-1)+x(1-5\sqrt{5})=4$ R. $1;-\sqrt{5}-1;\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$

Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo: $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Prima di tutto osserviamo che $x=0$ non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe nullo il termine noto, cioè $a_0=0$ e di conseguenza sarebbe nullo anche il coefficiente di x^4, il grado dell'equazione diventerebbe ≤ 3. Questa premessa ci consente di dividere per x^2 ottenendo l'equazione equivalente data $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} = 0$, raccogliendo a fattori parziali si ha $a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0$.

Ponendo $t = x + \frac{1}{x}$ quindi $t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ da cui $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ e sostituendo nell'equazione $a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0$ ricaviamo la seguente equazione di secondo grado equivalente alla data: $a_0(t^2 - 2) + a_1 t + a_2 = 0 \rightarrow a_0 t^2 + a_1 t + a_2 - 2a_0 = 0$. Trovate, se esistono reali, le radici t_1 e t_2 di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni $x + \frac{1}{x} = t_1$ e $x + \frac{1}{x} = t_2$ fratte nell'incognita x, rispettivamente equivalenti a $x^2 - t_1 x + 1 = 0$; $ax^2 - t_2 x + 1 = 0$. Queste ultime equazioni hanno soluzioni reali se e solo se $|t| \ge 2$.

Infatti, risolvendo rispetto a x l'equazione $x + \frac{1}{x} = t$, troviamo: $x^2 - tx + 1 = 0$ e calcolando il discriminante $\Delta = t^2 - 4$ vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se $t^2 - 4 \ge 0$ ovvero se e solo se $t \le -2 \vee t \ge 2$ cioè $|t| \ge 2$.

Esempi

- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Ponendo $t = x + \frac{1}{x}$ otteniamo l'equazione $1 \cdot (t^2 - 2) - 4t + 5 = 0$ ovvero $t^2 - 4t + 3 = 0$ da cui $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$. Il primo valore t_1 non dà soluzioni reali poiché l'equazione $x + \frac{1}{x} = 1$ ha il discriminante negativo mentre l'equazione $x + \frac{1}{x} = 3$ ha due soluzioni reali distinte $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Dividiamo ambo i membri dell'equazione per x^2, certamente diverso da zero e otteniamo:

$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow 2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3 \cdot (\ldots\ldots\ldots) - \ldots = 0 \rightarrow 2 \cdot (t^2 - \ldots\ldots) + 3t = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0 \rightarrow t_1 = \ldots\ldots\ldots \vee t_2 = \ldots\ldots\ldots$

Poiché $|t| \ge 2$ le equazioni $x + \frac{1}{x} = t_1$ e $x + \frac{1}{x} = t_2$ hanno entrambe soluzioni reali distinte, pertanto $I.S. = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

171 Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0(t^2 - 2) + a_1 t + a_2 = 0 \rightarrow a_0 t^2 + a_1 t + a_2 - 2a_0 = 0$ affinché esistano reali i valori della nuova incognita t.

Risolvi le seguenti equazioni

172 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ R. $1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

173 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$ R. $-3 \pm 2\sqrt{2}$

174 $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ R. $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

175 $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$ R. $x = 3; x = \frac{1}{3}; x = -2; x = -\frac{1}{2}$

Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^4 + a_1 x^3 - a_1 x - a_0 = 0$ in cui il coefficiente di x^2 è nullo.

Per risolvere questa equazione, raccogliamo a fattore parziale a_0 e a_1 ottenendo:

$a_0(x^4-1)+a_1(x^3-x)=0$ da cui $a_0(x^2-1)(x^2+1)+a_1 x(x^2-1)=0$

Raccogliendo a fattore comune totale si ha (x^2-1)

Scomponendo in fattori: $(x^2-1)(a_0(x^2+1)+a_1 x)=0$ ovvero $(x-1)(x+1)(a_0 x^2+a_1 x+a_0)=0$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici $x_1=1,\ x_2=-1$ e le eventuali radici reali dell'equazione di secondo grado $a_0 x^2+a_1 x+a_0=0$.

176

Esempio

■ $x^4-8x^3+8x-1=0$

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie, si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo e che gli altri coefficienti sono a due a due opposti.

Raccogliendo a fattore comune parziale $(x^4-1)-8x(x^2-1)=0 \rightarrow (x^2-1)(x^2+1)-8x(x^2-1)$ mettendo in evidenza il binomio (x^2-1) abbiamo: $(x^2-1)(x^3-8x+1)$ da cui, risolvendo le equazioni $x^2-1=0$ e $x^3-8x+1=0$, otteniamo tutte le radici: $x_1=1 \vee x_2=-1 \vee x_3=4+\sqrt{15} \vee x_4=4-\sqrt{15}$ e quindi $I.S.=\{-1;\ 1,\ 4+\sqrt{15};\ 4-\sqrt{15}\}$.

177 Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0 x^2+a_1 x+a_0=0$ affinché esistano reali le sue soluzioni.

178 Determinare per quale valore di k , l'equazione $(2k-\sqrt{2})x^4+5x^3-5x-2\sqrt{2}=0$ è reciproca. È vero che $I.S.=\{+1;-1\}$? R. $k=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Risolvi le seguenti equazioni

179 $x^4-3x^3+3x-1=0$ R. $\pm1;\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

180 $4x^4-5x^3+5x-4=0$ R. ±1

181 $3x^4+7x^3-7x-3=0$ R. $\pm1;\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$

182 $x^4-7x^3+7x-1=0$ R. $\pm1;\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$

183 $5x^4-11x^3+11x-5=0$ R. $\pm1;\frac{11\pm\sqrt{21}}{10}$

184 $6x^4-13x^3+13x-6=0$ R. $\pm1;\frac{2}{3};\frac{3}{2}$

185 $7x^4-15x^3+15x-7=0$ R. $\pm1;\frac{15\pm\sqrt{29}}{14}$

186 $x^3(x-1)=1-4x$ R. $\pm1;2\pm\sqrt{3}$

187 $\frac{x-5}{5x-1}+\frac{1}{x^3}=0$ R. $\pm1;\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

188 $\frac{x^2}{6x^3+1}=\frac{x}{x^3+6}$ R. $0;\pm1;3\pm\sqrt{2}$

189 $\frac{x^4+2x-1}{8x^3}-\frac{1+8x^2}{4x^2}+\frac{x-1}{x}+\frac{1+x}{x^2}=0$ R. $\pm1;4\pm\sqrt{15}$

Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5+a_1 x^4+a_2 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0=0$.
Con il raccoglimento parziale possiamo scrivere: $a_0(x^5+1)+a_1(x^4+x)+a_2(x^3+x^2)=0$
applicando la formula per la scomposizione della somma di potenze abbiamo:
$a_0(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1 x(x+1)(x^2-x+1)+a_2 x^2(x+1)=0$
raccogliendo $(x+1)$ ricaviamo: $(x+1)\left[a_0(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1 x(x^2-x+1)+a_2 x^2\right]=0$
e quindi l'equazione diventa: $(x+1)\left[a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right]=0$
Per la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale $x=-1$ e con i metodi analizzati in precedenza si risolve l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:
$(a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0)=0$.

Esempio

- $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$.

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è $x_1=-1$; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere allora riscritta nella forma seguente:
$(x+1)(6x^4-5x^3-38x^2-5x+6)=0$.
Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$, si trovano le altre quattro radici: $x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=3,\ \text{e}\ x_5=\frac{1}{3}$. $I.S.=\left\{-1;-2;-\frac{1}{2};\ 3;\frac{1}{3}\right\}$

Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5+a_1 x^4+a_2 x^3-a_2 x^2-a_1 x-a_0=0$.

Con il raccoglimento parziale si ottiene $a_0(x^5-1)+a_1(x^4-x)+a_2(x^3-x^2)=0$
applicando la formula per la somma di potenze, si ha:
$a_0(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1 x(x-1)(x^2+x+1)+a_2 x^2(x-1)=0$
raccogliendo il binomio $(x-1)$ si ottiene $(x-1)\left[a_0(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1 x(x^2+x+1)+a_2 x^2\right]=0$
e quindi $(x+1)(a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0)=0$
Una radice è $x=1$ e le altre provengono dall'equazione di quarto grado reciproca di prima specie: $a_0 x^4+(a_1+a_0)x^3+(a_2+a_1+a_0)x^2+(a_1+a_0)x+a_0=0$.

Esempio

- $x^5+2x^4-5x^3+5x^2-2x-1=0$.

E' un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1=1$; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere riscritta nella forma seguente: $(x-1)(x^4+3x^3-2x^2+3x+1)=0$. Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$, si trovano altre due radici reali: $x_2=-2+\sqrt{3}$ e $x_3=-2-\sqrt{3}$, pertanto $I.S.=\{+1;-2+\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\}$

Equazione reciproca di sesto grado:

Esempio

- $-x^6+6x^5+6x^4-6x^2-6x+1=0$.

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è nullo); l'equazione ammette per radici $x_1=1$ e $x_2=-1$, quindi possiamo dividere il polinomio per il binomio (x^2-1) , ottenendo come quoziente $-x^4+6x^3+5x^2+6x-1$; si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali: $x_3=\frac{7+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

190 Nell'equazione $(2-a)x^5-x^4+(3+a)x^3+2bx^2+x+5b=0$ determinare a e b in modo che l'equazione sia reciproca. R. $a=-\frac{11}{7};\ b=\frac{5}{7}$

Risolvi le seguenti equazioni

191 $6x^3+7x^2-7x-6=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{2}{3};1\right\}$

192 $2x^3+5x^2+5x+2=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

193 $x^3-3x^2+3x-1=0$ R. $I.S.=\{1\}$

194 $3x^3-4x^2+4x-3=0$ R. $I.S.=\{1\}$

195 $2x^4-5x^3+5x-2=0$ R. $I.S.=\left\{\frac{1}{2};2;-1;1\right\}$

196 $-5x^4+3x^3-3x+5=0$ R. $I.S.=\{-1;1\}$

197 $2x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

198 $-2x^4+8x^3-8x+2=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1;1\}$

199 $2x^3-5x^2-5x+2=0$ R. $x=-1;x=\frac{7+\sqrt{33}}{4};x=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$

200 $3x^3-6x^2-6x+3=0$ R. $x=-1;x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

201 $5x^3-7x^2+7x-5=0$ R. $x=1$

202 $4x^3-20x^2+20x-4=0$ R. $x=1;x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

203 $5x^3-5x^2-5x+5=0$ R. $x=1;x=-1$

204 $4x^3-9x^2+9x-4=0$ R. $x=1$

205 $\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0$ R. $x=1;x=-\frac{2}{3};x=-\frac{3}{2}$

206 $3x^3-2x^2+2x-3=0$ R. $x=1$

207 $-2x^3+10x^2+10x-2=0$ R. $x=-1;x=3+2\sqrt{2};x=3-2\sqrt{2}$

208 $x^4-\frac{9}{4}x^3-\frac{13}{2}x^2-\frac{9}{4}x+1=0$ R. $x=-1;x=4;x=\frac{1}{4}$

209 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ R. $x=1$

210 $x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2+\frac{10}{3}x+1=0$ R. $x=-3;x=-\frac{1}{3}$

211 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$ R. $x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

212 $x^4-x^3+x-1=0$ R. $x=1;x=-1$

213 $x^4-6x^3+6x-1=0$ R. $\pm1;x=3\pm2\sqrt{2}$

214 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

215 $x^4-5x^3-12x^2-5x+1=0$ R. $x=-1;x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2};x=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

216 $3x^4-x^3+x-3=0$ R. $x=1;x=-1$

217 $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$ R. $x=2;x=\frac{1}{2}$

218 $2x^4-x^3+4x^2-x+2=0$ R. impossibile

219 $3x^4-7x^3+7x-3=0$ R. $\pm1;\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$

220 $3x^4-6x^3+6x-3=0$ R. $x=1;x=-1$

221 $2x^4-6x^3+4x^2-6x+2=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

222 $x^4+8x^3-8x-1=0$ R. $\pm1;x=-4\pm\sqrt{15}$

223 $6x^4-37x^3+37x-6=0$ R. $\pm1;+6;\frac{1}{6}$

224 $x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=1;x=-1$

225 $x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$ R. $x=-1;x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

226 $x^5+3x^4+x^3-x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

227 $x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=0$ R. $x=1$

228 $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1=0$ R. $x=1$

229 $x^5-5x^3-5x^2+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

230 $x^5+3x^4-2x^3+2x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-2+\sqrt{3}\,;\,x=-2-\sqrt{3}$

231 $2x^5-2x^4+2x^3+2x^2-2x+2=0$ R. $x=-1$

232 $x^6-x^5-5x^4+5x^2+x-1=0$ R. $\pm1\,;\,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

233 $x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

234 $x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

235 $x^5-\frac{11}{4}x^4-\frac{55}{8}x^3+\frac{55}{8}x^2+\frac{11}{4}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=4\,;\,x=\frac{1}{4}\,;\,x=-2\,;\,x=-\frac{1}{2}$

236 $x^5-4x^4+\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-4x+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=2\,;\,x=\frac{1}{2}$

237 $x^6+\frac{13}{6}x^5+x^4-x^2-\frac{13}{6}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-\frac{3}{2}\,;\,x=-\frac{2}{3}$

238 $x^6+\frac{16}{3}x^5+\frac{23}{3}x^4-\frac{23}{3}x^2-\frac{16}{3}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-3\,;\,x=-\frac{1}{3}$

239 $x^6+x^4-x^2-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

240 $x^6-4x^5-x^4+8x^3-x^2-4x+1=0$ R. $\pm1\,;\,2\pm\sqrt{3}$

241 $x^6+2x^4+2x^2+1=0$ R. impossibile

242 $3(2x-2)^3+(10x-5)^2-25=0$ R. $1\,;\,-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{2}{3}$

243 $\frac{6x^2-2}{x^2+1}=\frac{6}{x^4-5x^2-6}+\frac{5x}{6-x^2}$ R. 2; ½; -3; -1/3

244 $x^4+5x(x+1)^2+(1-2x)(1+2x)=0$ R. $-3\pm2\sqrt{2}$

245 $\frac{9x^2(x+4)}{9x+1+\sqrt{10}}=\frac{9x+1-\sqrt{10}}{x-6}$ R. $\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

246 $\frac{x^2(x+4)}{x-1}-\frac{8x+1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}=0$ R. $-3\pm2\sqrt{2}$

Autori

Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Antonio Bernardo: coordinamento, esercizi
Claudio Carboncini: coordinamento, trascrizione
Gemma Fiorito: correzioni
Nicola De Rosa: correzioni
Lucia Rapella: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 05.07.2012