MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2
1. NUMERI REALI E RADICALI

Jonycunha, Ponto de convergencia
http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/

Indice

►1. Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei **numeri naturali** racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n+m$ è il numero che si ottiene partendo da *n* e continuando a contare per altre *m* unità;
- *sottrazione*: $n-m$ è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a *m* dà come risultato *n*;
- *moltiplicazione*: $n\cdot m$ è il numero che si ottiene sommando *n* volte *m*, o meglio sommando *n* addendi tutti uguali a *m*;
- *divisione*: $n:m$ è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per *m* dà come risultato *n;*
- *potenza*: n^m è il numero che si ottiene moltiplicando *m* fattori tutti uguali a *n* con $m\geq 2$; e ponendo $n^1=n$ e $n^0=1$;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ con $n\geq 2$ è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a *n* dà come risultato *m*.

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, *n* ed *m*, la somma $n+m$ e il loro prodotto $n\cdot m$ è sempre un numero naturale; la potenza n^m , escluso il caso 0^0 , è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza $n-m$, il quoziente $n:m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$. Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre saper eseguire sempre queste operazioni.
Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca abbiamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo 10000-12000. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di 12000-10000. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno + o il segno -. Si genera così l'insieme dei **numeri relativi**

$$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$$

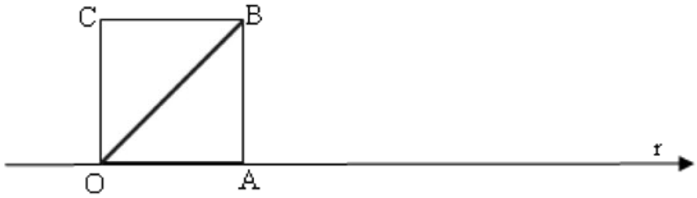
Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.
Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre hai casi n:0 e 0:0, non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione 3:4. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere risolta. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuno toccano $\frac{3}{4}$ di uovo.

Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avra 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.
Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{3}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale 0,75. Le due scritture sono perfettametne equivalenti. Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei **numeri razionali** che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{m} \mid n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}, m\neq 0\right\}=\left\{0,+1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{2}{3,}-\frac{1}{5},-\frac{11}{17},\frac{129}{1725}...\right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero $\sqrt{2}$, cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; il quale non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono numeri irrazionali.
Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il

ragionamento.
Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo un quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale:



Dati :
OABC è un quadrato
$\overline{OA}=1$

Obiettivo:
Calcolare $\overline{OB}$
Soluzione: il triangolo OAB è rettangolo in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=2$
Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2=1^2+1^2=2$; per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata di 2, cioè $\overline{OB}=\sqrt{2}$. Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere, perché è il numero che esprime la misura della diagonale OB del quadrato. Ma quanto vale? Come facciamo ad esprimerlo sotto forma di numero decimale, finito o infinito che sia?
$\sqrt{2}$ non è un numero intero, infatti $1^2=1$ e $2^2=4$, il numero deve quindi essere compreso tra 1 e 2, cioè $1<\sqrt{2}<2$. Prendiamo tutti i numeri decimali a una sola cifra compresi tra 1 e 2 e calcoliamo il loro quadrato:

x	1	1,1	1,2	1,3	**1,4**	**1,5**	1,6	1,7	1,8	1,9	2
x^2	1	1,21	1,44	1,69	**1,96**	**2,25**	2,56	2,89	3,24	3,61	4

Nessuno dei numeri decimali a una cifra è il numero che stiamo cercando. Possiamo però osservare che il numero che stiamo cercando è compreso tra 1,4 e 1,5, cioè: $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$. Abbiamo così ottenuto due valori che approssimano $\sqrt{2}$ a meno di 1/10.
Possiamo migliorare l'approssimazione prendendo tutti i numeri a due cifre decimali compresi tra 1,4 e 1,5

x	1,40	**1,41**	**1,42**	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50
x^2	1,9600	**1,9881**	**2,0164**	2,0449	2,0736	2,1025	2,1316	2,1609	2,1904	2,1904	2,2500

Nessuno dei numeri elencato è quello che stiamo cercando, tuttavia possiamo concludere che $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.
E' possibile continuare indefinitamente questo procedimento, ottenendo valori decimali che approssimano sempre meglio $\sqrt{2}$. Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, migliorando a ogni passaggio l'approssimazione. Il procedimento purtroppo sembra non finire mai, né troviamo cifre che si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	numero	valore per eccesso	ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142.	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
…	…	…	...

Il procedimento che abbiamo visto ci dice semplicemente come costruire un'approssimazione del numero ma $\sqrt{2}$ ma non ci permette di concludere che il procedimento non finirà mai. Per arrivare a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, dobbiamo fare un ragionamento di tipo diverso, conducendo una "dimostrazione per assurdo".
Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e che quindi possa essere scritto in forma di frazione, precisamente $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Supponiamo di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ e che quindi *a* e *b* siano primi tra loro. Elevando al quadrato si ha : $2=\frac{a^2}{b^2}$, che possiamo scrivere come $a^2=2b^2$. Da ciò segue che a^2 è un numero pari, in quanto lo è $2b^2$. Se a^2 è pari lo è anche *a*, poiché il quadrato di un numero pari è pari. Se *a* è pari possiamo scriverlo nella forma *2m,* per cui si ha $2b^2=a^2=(2m)^2$ cioè $2b^2=(2m)^2$ .Sviluppiamo il quadrato al secondo membro: $2b^2=4m^2$,

semplifichiamo per 2 si ha: $b^2=2m^2$. Poiché $2m^2$ è pari lo è anche b^2 e per il ragionamento che abbiamo fatto prima lo è anche *b*. Siamo arrivati a concludere che a e b sono entrambi pari, il che non è possibile in quanto avevamo detto di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ mentre ora ci accorgiamo che essendo entrambi pari si poteva semplificare per 2. Il che è assurdo, pertanto la supposizione che $\sqrt{2}$ si potesse esprimere in forma di frazione è errata.
Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$, … Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero π, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.
Questi numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ad altri, come π ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme **J** dei numeri irrazionali.
L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e **J** è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali .

1 Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

2 Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso, come nell'esempio:

$\sqrt{3}$ A={1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; ...} B={2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206; ...}

a) $\sqrt{5}$ A={... B={...

b) $\frac{6}{7}$ A={... B={...

c) $\frac{1}{6}$ A={... B={...

►2. I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup J$, i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche.
Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625.
La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico 0,9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352...
Il numero π è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre:
π = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 ...
Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numero reale.
In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo r = n +0,abcdefg..., dove r è il numero reale, n è la parte intera è 0,abcd... è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione:
1 = 0,99999999... A ben osservare tutti i numeri decimali finiti ammettono la doppia rappresentazione:
1,225 = 1,22499999999... Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.
Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi a patire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$. La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$? Per rappresentare il numero $\sqrt{2}$ abbiamo costruito un insieme, chiamiamolo A, di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, chiamiamolo B, di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero $\sqrt{2}$ spezzi l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due parti: quella dei numeri razionali *a* tali che $a^2<2$ e quella dei numeri razionali *b* tali che $b^2>2$.

La coppia di insiemi (A, B) caratterizza il numero $\sqrt{2}$, anzi si può dire che $\sqrt{2}$ è proprio la coppia (A, B).

É proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama **sezione**, o partizione di $\mathbb{Q}$, una coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B che devono soddisfare le condizioni: $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$; $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$.

Esempi

- Cosideriamo i due insiemi A e B così definiti: $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 3\}$. Essi definiscono una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3.
- Siano $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ la coppia (A, B) non è una sezione di $\mathbb{Q}$ perché pur essendo $A \cap B = \emptyset$ non è $A \cup B = \mathbb{Q}$.
- Siano $A = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \leq \frac{2}{7}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \geq \frac{2}{7}\right\}$, anche in questo caso la coppia (A, B) non è una sezione di $\mathbb{Q}$ poiché $A \cap B = \left\{\frac{2}{7}\right\}$.
- Costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tuti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2. $A = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\}$. Si ha $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque (A, B) è una sezione di $\mathbb{Q}$, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non eisiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme $\mathbb{Q}$.

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione (A, B) può essere di tre tipi:

- A ammette massimo e B non ammette minimo;
- A non ammette massimo e B ammette minimo;
- A non ammette massimo e B non ammette minimo.

DEFINIZIONE. Si chiama **elemento separatore** di una partizione (A, B) di $\mathbb{Q}$ il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione (A, B) ammette un elemento separatore e identifica il numero razione 3.

Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione (A, B) identifica un numero irrazionale.

DEFINIZIONE. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo **numero irrazional**e le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.

Ritornando all'esempio precedente, il numero $\sqrt{2}$ è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q} / x < 0 \text{ oppure } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 > 2\}$.

Nell'insieme A ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto: $A = \{1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}414213; ...\}$.

Nell'insieme B ci sono tutti i numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per eccesso: $B = \{2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; 1{,}4143; 1{,}41422; 1{,}414214; ...\}$.

3 *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:*

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$, l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

Confronto. Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

Esempi

- $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri $\sqrt{2}=1{,}4142...$, $\sqrt{3}=1{,}7320...$; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3.
- $\sqrt{99}<10$ per verificarlo è sufficiente osservare che $\sqrt{100}=10$.

4 *Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso, come nell'esempio:* $5<\sqrt{30}<6$

a) $\sqrt{50}$ $\sqrt{47}$ $\sqrt{91}$ $\sqrt{73}$ $\sqrt{107}$ $\sqrt{119}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ $2\sqrt{7}$ $2+\sqrt{7}$ $\sqrt{20}-\sqrt{10}$ $\sqrt{\frac{7}{10}}$ $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$

5 *Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:*

a) $\sqrt{2}$ 1 $\frac{2}{3}$ $2{,}0\overline{13}$ $\sqrt{5}$ $\frac{3}{2}$ $0{,}75$

b) π $\sqrt{3}$ $\frac{11}{5}$ $0{,}\overline{9}$ $\sqrt{10}$ $3{,}1\overline{4}$ $\sqrt[3]{25}$

Concludiamo il paragrafo con alcuni argomenti già accennati in Algebra 1 ma che trovano solo ora una giusta collocazione teorica.

DEFINIZIONE. Un insieme X si dice **continuo** se ogni partizione (X', X”) di X ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento x appartenente a X tale che per ogni x' di X' e per ogni x” di X” si ha x'≤x≤x”.

TEOREMA DI DEDEKIND. Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione (A,B) di numeri reali.

POSTULATO DI CONTINUITÀ DELLA RETTA. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedrete in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

6 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme **J** dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri

$\sqrt{3}$ $\sqrt[3]{5}$ π $0{,}\overline{3}$ $3{,}14$ $\frac{3}{2}$ -2

7 *Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni*

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale V F
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale V F
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale V F
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F

►3. Richiami sul valore assoluto

Valore assoluto. Si definisce valore assoluto di un numero reale *a*, si indica con |a|, il numero stesso se *a* è positivo o nullo, il suo opposto se *a* è negativo.

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a<0 \end{cases}$$

Il numero *a* si dice argomento del valore assoluto.

■ $|-3|=3$ ■ $|+5|=5$ ■ $|0|=0$

Proprietà del valore assoluto

- $|x+y| \leq |x|+|y|$ Il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.
- $|x-y| \leq |x|+|y|$ Il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.
- $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$ Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

Esempi

■ $|5+3|=|5|+|3|$ in entrambi i casi si ottiene 8

■ $|5+(-3)|=2$ mentre $|5|+|-3|=8$, pertanto $|5+(-3)|<|5|+|-3|$

8 *Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri*

a)	$\lvert -5\rvert$	$\lvert +2\rvert$	$\lvert -1\rvert$	$\lvert 0\rvert$	$\lvert -10\rvert$
b)	$\lvert +3-5\rvert$	$\lvert -3+5\rvert$	$\lvert (-1)^3\rvert$	$\lvert -1-2-3\rvert$	$\lvert +3\cdot(-2)-5\rvert$

9 Due numeri reali x ed y sono entrambi non nulli e di segno opposto.
Verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati a fianco.

	Relazione	x=-3 y=+5	x=-2 y=+2	x=-10 y=+1	x=+1 y=-5
a)	|x| < |y|	V F	V F	V F	V F
b)	|x| = |y|	V F	V F	V F	V F
c)	|x| < y	V F	V F	V F	V F
d)	|x + y| < |x| + |y|	V F	V F	V F	V F
e)	|x - y| = |x| - |y|	V F	V F	V F	V F
f)	||x| - |y|| = |x - y|	V F	V F	V F	V F

Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?
a) dipende da x e y; b) dipende da x e y; c) dipende da x e y; d) sempre vera; e) sempre vera; f) sempre falsa.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x)<0 \end{cases}$$

Esempi

■ $|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ se } x \geq 1 \\ -x+1 \text{ se } x<1 \end{cases}$

■ $|x^2|=x^2$ infatti x^2 è una quantità sempre non negativa.

■ $|a^2+1|=a^2+1$ infatti a^2 è sempre positivo, aumentato di 1 sarà sempre >0.

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

■ $f(a)=|a+1|-3a+1$ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è

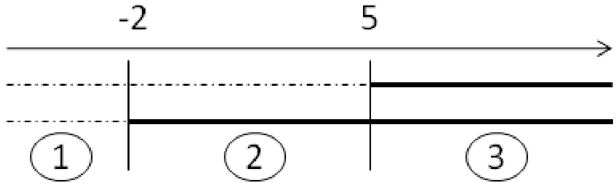
$$f(a)=|a+1|-3a+1=\begin{cases} a+1-3a+1 \text{ se } a+1\geq 0 \rightarrow a\geq -1 \\ -(a+1)-3a+1 \text{ se } a+1<0 \rightarrow a<-1 \end{cases}=\begin{cases} -2a+1 \text{ se } a\geq -1 \\ -4a \text{ se } a<-1 \end{cases}$$

Una funzione di questo tipo si dice **definita per casi**.

■ $|x-5|=\ x-5$ se $x\geq 5$; $-(x-5)$ se $x<5$

Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni

Esempio



■ $|x-5|+|x+2|$

L'argomento del primo valore assoluto $|x-5|$ è non negativo quando $x\geq 5$.

L'argomento del secondo valore assoluto $|x+2|$ è non negativo quando $x\geq -2$.

L'insieme dei numeri reali resta diviso in tre intervalli:

(1) $x<-2$ in questo intervallo entrambi gli argometni dei valori assoluti sono negativi, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)-(x+2)=-x+5-x-2=-2x+3$.

Se x=-2 si ha $|-2-5|+0=7$

(2) $-2<x<5$ l'argomento del primo valore assoluto è negativo mentre l'argomento del secondo valore assoluto è positivo, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)+(x+2)=-x+5+x+2=7$.

Se x=5 si ha $0+|5+2|=7$

(3) $x>5$ gli argomenti di entrambi i valori assoluti sono positivi, pertanto $|x-5|+|x+2|=(x-5)+(x+2)=2x-3$.

Possiamo allora sintetizzare in questo modo $|x-5|+|x+2|=\begin{cases} -2x+3 \text{ se } x<-2 \\ 7 \text{ se } -2\leq x<5 \\ 2x-3 \text{ se } x\geq 5 \end{cases}$

Come nell'esempio, elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

10 $|x+1|$ $\qquad |x-1|$

11 $|x^2+1|$ $\qquad |(x+1)^2|$

12 $|x^2-1|$ $\qquad |x^3-1|$

13 $|x^2-6x+8|$ $\qquad |x^2+5x+4|$

14 $\dfrac{|x+1|}{|x+2|}$ $\qquad \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

15 $|x+1|+|x-2|$ $\qquad |x+2|+|x-2|$

16 $|x-2|+|x-3|$ $\qquad |x+1|\cdot|x+2|$

17 $\left|\dfrac{x+1}{4}\right|+\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$ $\qquad \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|+\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$

►4. Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale *r* è il numero che si ottiene moltiplicando *r* per se stesso: $r^2=r\cdot r$. Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato: $(+3)^2=9\ ;\ (-2)^2=+4\ ;\ (-5)^2=(+5)^2=+25$.
L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama **radice quadrata**. La radice quadrata di un numero reale a è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero *a*.
Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato possa dare come risultato un numero negativo.

DEFINIZIONE. Si dice **radice quadrata** di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato.
In simboli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ dove $a,b\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

Il simbolo $\sqrt{\cdot}$ è il simbolo della radice quadrata; il numero *a* è detto **radicando**, il numero *b* è detto **radice quadrata** di *a*.
Dalla definizione $\sqrt{a^2}=a$ con $a\geq 0$.
Per esempio $\sqrt{81}=9$ perché $9^2=81$; $\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$ perché $\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$.
Osserva ora che $\sqrt{81}=\sqrt{(-9)^2}$ ma non è vero che $\sqrt{(-9)^2}=-9$ perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata sia sempre un numero positivo o nullo.
Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione **quando il radicando è un'espressione letterale**: in questo caso $\sqrt{a^2}=a$ non è del tutto corretto poiché *a* può assumere sia valori positivi sia valori negativi.
Scriveremo correttamente $\sqrt{a^2}=|a|$.

Esempi

- $\sqrt{4}=2$ infatti $2^2=4$
- $\sqrt{25}=5$ infatti $5^2=25$
- $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ infatti $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$
- $\sqrt{0{,}01}=0{,}1$ infatti $0{,}1^2=0{,}01$
- $\sqrt{1}=1$ infatti $1^2=1$
- $\sqrt{0}=0$ infatti $0^2=0$
- $\sqrt{-16}$ non esiste perché il radicando è negativo.
- $\sqrt{11}$ esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale.
- $\sqrt{x^2}=|x|$ dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conosciamo il segno di x.
- $\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$ dobbiamo mettere il valore assoluto perché a-2 può anche essere negativo.
- $\sqrt{9(x+1)^2}=3|x+1|$

18 *Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle)*

a)	$\sqrt{9}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{-49}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{-81}$
b)	$\sqrt{\frac{16}{25}}$	$\sqrt{\frac{49}{81}}$	$\sqrt{\frac{121}{100}}$	$\sqrt{\frac{144}{36}}$	$\sqrt{\frac{-1}{4}}$
c)	$\sqrt{0{,}04}$	$\sqrt{0{,}09}$	$\sqrt{0{,}0001}$	$\sqrt{0{,}16}$	$\sqrt{-0{,}09}$
d)	$\sqrt{\frac{144}{9}}$	$\sqrt{25\cdot 16}$	$\sqrt{36\cdot 49}$	$\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}0121}$	$\sqrt{\frac{1}{100}}$
e)	$\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$			$\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$	

19 *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a 1/10:* $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{17}{4}}$

20 *Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto*
$\sqrt{a^2+2a+1}$ $\sqrt{4x^2+8x+4}$ $\sqrt{9-12a+4a^2}$

►5. Radici cubiche

DEFINIZIONE: Si dice **radice cubica** di un numero reale *a* quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[3]{a}=b \Leftrightarrow b^3=a$ dove $a, b\in\mathbb{R}$.

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale positivo o negativo o nullo esiste sempre.

Esempi

- $\sqrt[3]{-8}=-2$ infatti $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$
- $\sqrt[3]{125}=5$ infatti $5^3=5\cdot5\cdot5=125$
- $\sqrt[3]{1}=1$ infatti $1^3=1\cdot1\cdot1=1$
- $\sqrt[3]{0}=0$ infatti $0^3=0\cdot0\cdot0=0$
- $\sqrt[3]{-1000}=-10$ infatti $(-10)^3=-1000$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$
- $\sqrt[3]{0{,}125}=0{,}5$ infatti $(0{,}5)^3=0{,}125$
- $\sqrt[3]{x^3}=x$ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto
- $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$ non si deve mettere il valore assoluto

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre lo stesso segno della base.

►6. Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice n.

DEFINIZIONE. Si dice radice *n*-esima di un numero reale *a* quel numero *b* che elevato ad *n* dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$ con $n\in\mathbb{N},\ n\geq2$.
Non si definisce la radice di indice 0: la scrittura $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato.
Alla scrittura $\sqrt[1]{a}$ si dà il valore *a*.

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

- se l'indice *n* è dispari la $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di a∈R, inoltre è negativa se a<0, positiva se a>0 e nulla se a=0;
- se l'indice *n* è pari la $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di a≥0 e si ha che $\sqrt[n]{a}\geq0$.

Esempi

- $\sqrt[4]{16}=2$ infatti $2^4=16$
- $\sqrt[4]{-16}$ non esiste
- $\sqrt[5]{32}=2$ infatti $2^5=16$
- $\sqrt[4]{1}=1$ infatti $1^4=1$
- $\sqrt[n]{0}=0$ per ogni n>0
- $\sqrt[5]{-1}=-1$ infatti $(-1)^5=-1$
- $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è pari
- $\sqrt[5]{x^5}=x$ non va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

21 *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a 1/10*

$\sqrt[3]{3}$ $\quad\sqrt[3]{4}$ $\quad\sqrt[3]{7}$ $\quad\sqrt[3]{100}$ $\quad\sqrt[3]{25}$ $\quad\sqrt[3]{250}$

Determina le seguenti radici se esistono

22 $\sqrt[3]{27}$ $\quad\sqrt[3]{64}$ $\quad\sqrt[3]{-1}$

23 $\sqrt[3]{1000}$ $\quad\sqrt[3]{125}$ $\quad\sqrt[3]{-216}$

24 $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $\quad\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$

25 $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\quad\sqrt[3]{-0{,}008}$

26 $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}$ $\quad\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{122+\sqrt[3]{27}}}}$ $\quad\sqrt[3]{27\cdot\sqrt{64}}$

27 $\sqrt[9]{0}$ $\quad\sqrt[8]{-1}$ $\quad\sqrt[5]{-100000}$

28 $\sqrt[4]{0{,}0001}$ $\quad\sqrt[4]{81}$ $\quad\sqrt[6]{64}$

29 $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ $\quad\sqrt[4]{-4}$ $\quad\sqrt[10]{0}$

30 $\sqrt[4]{0{,}0081}$ $\quad\sqrt[5]{34+\sqrt[4]{14+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}}$ $\quad\sqrt{20+\sqrt[3]{121+\sqrt[4]{253+\sqrt[5]{243}}}}$

31 $\sqrt{21+\sqrt{16}}$ $\quad\sqrt[5]{31+\sqrt[4]{1}}$ $\quad\sqrt[5]{240+\sqrt{9}}$

32 $\sqrt{\sqrt{0{,}16}}$ $\quad\sqrt[5]{32\cdot10^{-5}}$ $\quad\sqrt{3\sqrt{37-4\sqrt{81}\cdot27}}$

33 $\sqrt{72+\sqrt{80+\sqrt{1}}}$ $\quad\sqrt{\frac{25a^4}{9}}$ $\quad\sqrt[4]{620+\sqrt[4]{625}}$

34 $\sqrt{24336}$ $\quad\sqrt[5]{243}$ $\quad\sqrt[4]{600+\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}$

35 $\sqrt[3]{8a^3+12a^2+6a+1}$ $\quad\sqrt[3]{a^6+9a^4+27a^2+27}$ $\quad\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}$

►7. Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso.
Le **condizioni di esistenza**, in breve si può scrivere C.E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.
Supponiamo di avere $\sqrt[n]{A(x)}$ con A(x) polinomio nell'indeterminata x, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- se *n* è pari la radice esiste per tutti i valori di *x* che rendono non negativo il radicando, cioè C.E. $A(x)\geq 0$
- se *n* è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile x, purché esista il radicando stesso.

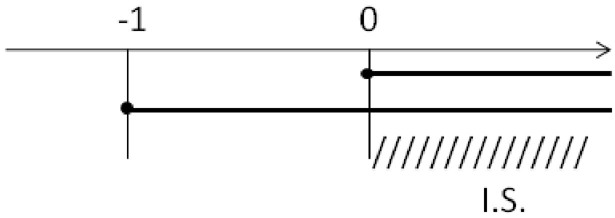
Esempi

- $\sqrt{x}$ C.E. $x\geq 0$ $\sqrt[3]{x}$ C.E. $\forall\, x\in\mathbb{R}$
- $\sqrt{-x}$ C.E. $x\leq 0$ $\sqrt[3]{-x}$ C.E. $\forall\, x\in\mathbb{R}$
- $\sqrt{x-1}$ C.E. $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$
- $\sqrt{a^2+1}$ C.E. $\forall\, a\in\mathbb{R}$, infatti a^2 è sempre positivo pertanto $a^2+1>0\ \forall\, a\in\mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$ C.E. La radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando,

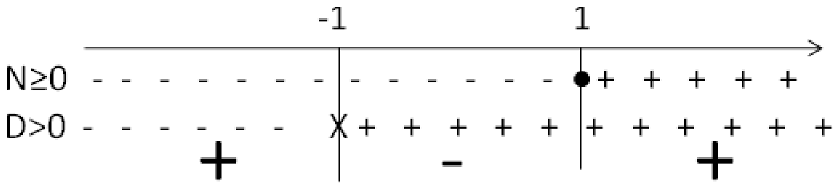
tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi C.E. $x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1$.

- $\sqrt[4]{xy}$ C.E. $xy\geq 0$
- $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

C.E. $\sqrt{x}$ esiste per $x\geq 0$, $\sqrt{x+1}$ esiste per $x+1\geq 0$, per individuare le condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il sistema
$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\geq 0\end{cases}$ cioè $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq -1\end{cases}$
In definitiva C.E. $x\geq 0$.



- $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ C.E. $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$ Occorre discutere il segno della frazione



Pertanto C.E. $x<-1\vee x\geq 1$

- $\sqrt[5]{a^2(a-3)}$ Poiché la radice ha indice dispari non occorre porre nessuna condizione di esistenza.

Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

36 $\sqrt[3]{x+1}$ $R.\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{1-x}$ $R.\ x\leq 1$

37 $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ $R. x>-1$ $\sqrt{3x^2 y}$ $R.\ y\geq 0$

38 $\sqrt[3]{3xy}$ $\sqrt[4]{-2x^2 y^2}$

39 $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$

40 $\sqrt{\dfrac{4-x}{x-3}}$ $\sqrt{x^2(x+1)}$

41 $\sqrt[3]{1+a^2}$ $\sqrt[6]{2x-1}$

42 $\sqrt{1-x}+2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ $\sqrt{1+|x|}$

43 $\sqrt{(a-1)(a-2)}$ $\sqrt{|x|+1}\cdot\sqrt[3]{x+1}$

44 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}$ $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3-x}}$

45 $\sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$ $R. -2<x\leq 5$ $\sqrt{\dfrac{2y}{(2y+1)^2}}$

46 $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-x}}$ $\sqrt{\dfrac{a}{a^2-a-2}}$

47 $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$ $R. b<-2\vee b>2$ $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}}$

48 $\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}}$ $\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{|x|}}$

49 $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2+4+8x}{9}}$ $\sqrt[6]{\dfrac{(b^2+1+2b)^3}{729b^6}}$

50 $\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-4}}$ $R. 0<x<1\vee x>4$ $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}}$

51 $\sqrt[4]{\dfrac{m+1}{m-1}}$ $\sqrt[3]{x(x+2)^2}$

52 $\sqrt{\dfrac{1+a}{a^2}}$ $\sqrt{\dfrac{a+2}{a(a-4)}}$

53 $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$ $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+6a+9}}$

54 $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$ $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

55 $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^3+1}}$

56 $\sqrt{2x+3}$ $\sqrt[3]{a^2-1}$

57 $\sqrt{x(x+1)(x+2)}$ $\sqrt{|x|+1}$

58 $\sqrt{\dfrac{x}{|x+1|}}$ $\sqrt{\dfrac{1}{-x^2-1}}$

►8. Potenze a esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale a≥0 sotto forma di potenza di a, vogliamo cioè che sia:

$$\sqrt[n]{a}=a^x$$

Caso con esponente positivo

Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza *n* otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(a^x\right)^n \quad \text{da cui si ottiene} \quad a=a^{n\cdot x}$$

Trattandosi di due potenze con base a≥0 uguali tra loro, l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere:

$$1=n\cdot x \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{n}$$

Possiamo quindi scrivere: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia *m* un numero intero positivo, possiamo scrivere

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Pertanto possiamo scrivere che $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Esempi

- Calcola $27^{\frac{2}{3}}$

Si ha che $27^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=3^2=9$

- Calcola $25^{\frac{3}{2}}$

Si ha che $25^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[2]{25}\right)^3=5^3=125$

Caso con esponente negativo

Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione a≠0, infatti risulta:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Esempi

- $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$
- $125^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^{-2}}=\sqrt[3]{(5^3)^{-2}}=\sqrt[3]{(5^{-2})^3}=5^{-2}=\frac{1}{25}$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}}=\sqrt{8^3}=\sqrt{(2^3)^3}=\sqrt{2^9}$
- $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}=(49)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$

In generale si dà la seguente

DEFINIZIONE. Si dice **potenza a esponente razionale** $\frac{m}{n}$ di un numero reale positivo *a* l'espressione:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{con} \quad \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che *a* sia un numero positivo?

Partiamo dall'espressione $a^{\frac{1}{n}}$ con $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, se n è dispari la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base a, mentre se è pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per a≥0.

Nel caso generale $a^{\frac{m}{n}}$ con $m\in\mathbb{Z}$ la formula $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è falsa se a<0.

Infatti facciamo un esempio:

$(-2)^{\frac{6}{6}}=\left[(-2)^{\frac{1}{6}}\right]^6=\left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ che non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo.

Tuttavia possiamo anche scrivere $(-2)^{\frac{6}{6}}=\left[(-2)^6\right]^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.
Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

Calcola le seguenti potenze con esponente razionale

59 $4^{\frac{3}{2}}$ $\quad 8^{\frac{2}{3}}$ $\quad 9^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 16^{\frac{3}{4}}$

60 $16^{\frac{5}{4}}$ $\quad \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ $\quad 125^{-\frac{2}{3}}$ $\quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$

61 $25^{-\frac{3}{2}}$ $\quad 27^{\frac{4}{3}}$ $\quad 32^{\frac{2}{5}}$ $\quad 49^{-\frac{1}{2}}$

62 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}$ $\quad (0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$

63 $4^{0{,}5}$ $\quad 16^{0{,}25}$ $\quad 32^{0{,}2}$ $\quad 100^{0{,}5}$

Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario

64 $\sqrt{2}$ $\quad \sqrt[3]{8^2}$ $\quad \sqrt[7]{5^3}$ $\quad \sqrt{3^3}$

65 $\sqrt{\left(\frac{1}{3^3}\right)}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ $\quad \sqrt[5]{\frac{4^2}{3^2}}$

66 Trasforma nella forma radicale le espressioni:

$$\left((a^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \left(1+\left(1+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

67 Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri

$0{,}00000001 \quad (0{,}1)^{10} \quad (0{,}1)^{0{,}1} \quad 10^{-10} \quad \sqrt{0{,}0000000001}$

►9. Proprietà invariantiva e semplificazione delle radici

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ non cambia se **moltiplichiamo** l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo.

In simboli $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nt]{a^{mt}}$ con $a\geq 0, m, n, t\in\mathbb{N}-\{0\}$

- $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}$ abbiamo moltiplicato indice della radice ed esponente del radicando per 2.
- $\sqrt[3]{a}=\sqrt[9]{a^3}$ abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune.
In simboli $\sqrt[nt]{a^{mt}}=\sqrt[n]{a^m}$ con $a\geq 0, m, n, t\in\mathbb{N}-\{0\}$

- $\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$ abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando.
- $\sqrt[10]{3^{15}}=\sqrt{3^3}$ abbiamo semplificato per 5.
- $\sqrt[7]{3^9}$ non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni.
- $\sqrt[8]{2^6}=2^{\frac{6}{8}}=$ semplificando la frazione dell'esponente $=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$
- $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}=\sqrt[6]{5^9}=\sqrt[2]{5^3}$
- $\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$
- $\sqrt{10^{-4}}$ semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ha $10^{-2}=\frac{1}{100}$
- $\sqrt{30\cdot 27\cdot 10}$ scomponendo in fattori primi otteniamo le seguenti potenze
$$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 3^3\cdot 2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}=2\cdot 3^2\cdot 5=90$$

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere

$$\sqrt[nt]{a^{mt}}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^m} & \text{se t è dispari}\\ \sqrt[n]{|a^m|} & \text{se t è pari}\end{cases}$$

- $\sqrt{4x^4y^2a^6}=\sqrt{2^2x^4y^2a^6}=2x^2|ya^3|$ abbiamo semplificato per 2 gli esponenti e la radice stessa.
- $\sqrt[12]{a^2+2a+1}=\sqrt[12]{(a+1)^2}=\sqrt[6]{|a+1|}$ Dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 gli indici.
- $\sqrt{x^2y^2}=|xy|$; $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$; $\sqrt{x^2+y^2}$ non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza.
- $\sqrt[6]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{|x-1|}$

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno, come mostrato dal seguente esempio:
- $\sqrt[10]{(-2)^6}\neq\sqrt[5]{(-2)^3}$

infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.
Invece la concordanza del segno è conservata in questo esempio:
- $\sqrt[9]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2}$

Infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.
Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto:
- $\sqrt[10]{(-2)^6}=\sqrt[5]{|-2^3|}$

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno.
- $\sqrt[10]{x^6}=\sqrt[5]{|x^3|}$ C.E: x può assumere qualunque valore di R

Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva

68 $\sqrt[4]{4}=\sqrt[8]{\ldots}$ $\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{\ldots}$ $\sqrt[5]{5}=\sqrt[15]{\ldots}$ $\sqrt{2}=\sqrt[6]{\ldots}$

69 $\sqrt{2}=\sqrt[\ldots]{16}$ $\sqrt[3]{3}=\sqrt[\ldots]{81}$ $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[\ldots]{25}$ $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}=\sqrt[\ldots]{\frac{27}{8}}$

70 $\sqrt[21]{a^7}=\sqrt[6]{\ldots}$ con a>0 $\sqrt[8]{a^{24}}=\sqrt[5]{\ldots}$ con a>0 $\sqrt[3]{27}=\frac{1}{\sqrt{\ldots}}$ $\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt[7]{\ldots}$

Semplifica i radicali

71 $\sqrt[4]{25}$ $\sqrt[6]{8}$ $\sqrt[8]{16}$

72 $\sqrt[9]{27}$ $\sqrt[4]{100}$ $\sqrt[6]{144}$

73 $\sqrt[4]{169}$ $\sqrt[6]{121}$ $\sqrt[6]{125}$

74 $\sqrt[4]{49}$ $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[12]{16}$

75 $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ $\sqrt[10]{\frac{25}{81}}$

76 $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}$ $\sqrt[9]{-3^3}$ $\sqrt[6]{(-2)^4}$

77 $\sqrt[12]{-4^6}$ $\sqrt[10]{-32}$ $\sqrt[6]{5^2-4^2}$

78 $\sqrt[4]{12^2+5^2}$ $\sqrt[10]{3^2+4^2}$ $\sqrt[4]{10^2-8^2}$

79 $\sqrt[3]{2^6\cdot 5^{15}}$ $\sqrt[4]{3^4\cdot 4^6}$ $\sqrt[5]{5^5\cdot 4^{10}\cdot 2^{15}}$

80 $\sqrt[9]{27\cdot 8\cdot 125}$ $\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[6]{1000}$

81 $\sqrt[4]{2+\frac{17}{16}}$ $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{4}+\frac{1}{8}\right)^4}$ $\sqrt[6]{\left(1+\frac{21}{4}\right)^3}$

82 $\sqrt[16]{(-16)^4}$ $\sqrt[10]{2^{10}\cdot 3^{20}}$ $\sqrt[6]{2^8\cdot 3^6}$

83 $\sqrt[12]{3^6\cdot 4^{12}}$ $\sqrt[4]{2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 12^5}$ $\sqrt[6]{3^9\cdot 8^2}$

84 $\sqrt[4]{9x^2y^4}$ $\sqrt[3]{64a^6b^9}$ $\sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$

85 $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}$ $\sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}$ $\sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$

86 $(\sqrt{a+1})^6$ $\sqrt[9]{27a^6b^{12}}$ $\sqrt[12]{(2x+3)^3}$

87 $\sqrt[6]{\frac{0,008x^{15}y^9}{8a^{18}}}$ $\sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$ $\sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$

88 $\sqrt[6]{a+2a+1}$ $\sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}$ $\sqrt{3a^2+\sqrt{a^4}}$

89 $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}$ $\sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$ $\sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$

90 $\sqrt[6]{\frac{9x^2}{y^6}}$ $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^6}{25x^2}}$ $\sqrt{\frac{2x^2-2}{8x^2-8}}$

91 $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}$ $\sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$ $\sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$

92 $\sqrt[4]{a^2+6a+9}$ $\sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}$ $\sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$

93 $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$ $\sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}$ $\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-2a+1}$

94 $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}$ $\sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7(x^3+3x^2+3x+1)^2}}$ $\sqrt{\frac{(x^3+x^2y)(a+2)}{2x+2y+ax+ay}}$

95 $\sqrt[2n]{16^n}$ $\sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$ $\sqrt[n]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$

96 $\sqrt[3n]{27^n\cdot 64^{2n}}$ $\sqrt[2n^2]{16^{2n}\cdot 81^{2n}}$ $\sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$

97 $\sqrt[5]{25x^3y^4}$ $\sqrt[12]{81a^6b^{12}}$ $\sqrt[5]{32x^{10}}$

►10. Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero.

Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

Esempi

- $\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=6^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{6^7}$
- $\sqrt[4]{6}:\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}:6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=6^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{6}}$

Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Anche per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esempi

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$
- $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}=\sqrt[3]{\frac{9}{72}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$
- $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}$ C.E. $a\geq 0\wedge b>0$ $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}=\sqrt{2a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{9}{2b}}=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}}=\frac{3a}{b}$

Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti con lo stesso indice usando la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

Procedura per ridurre due o più radici allo stesso indice:

1° passo: scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;
2° passo: porre le condizioni di esistenza;
3° passo: calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;
4° passo: per ciascuna radice dividere il m.c.m. per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.

Esempi

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro m.c.m. è 6, il primo radicando va elevato a 6:2 cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a 6:3 cioè 2

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}$$

- $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

Il m.c.m. tra gli indici delle radici è 12. Il primo radicando va elevato a 12:3=4; il secondo radicando va elevato a 12:4=3; il terzo va elevato a 12:6=2.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{8^3}{27^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{(2^3)^3}{(3^3)^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2^9}{3^9}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 2^9}{3^9\cdot 2^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}}=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}$ C.E. $x>0\wedge y>0$. Il m.c.m. degli indici delle radici è 6, quindi

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x^2 y)^2\cdot(xy)^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^4 y^2 x^3 y^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^7 y^5}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{x^5 y^2}$$

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero

Esempio

- $\sqrt[3]{\dfrac{ax+a}{x^2+2x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{ax-a}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{a(x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$

Poniamo le C.E. $x\neq -1\wedge(a>0\wedge x>1)\vee(a<0\wedge x<1)$

Semplifichiamo le frazioni di ciascun radicando $\sqrt[3]{\dfrac{a}{x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$

Trasformiamo nello stesso indice: il m.c.m. degli indici è 6, quindi

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x-1)^3}{a^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

Esempio

- $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}}:\sqrt[4]{\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$

Determiniamo le C.E. $(x-1)(x+1)>0$

		-1		1	
X-1>0	- - - - - -		- - - - - -		+ + + + + +
x+1>0	- - - - - -		+ + + + +		+ + + + +
	+		-		+

$x<-1\vee x>1$

Per le condizioni di esistenza bisogna tener conto che $\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$ essendo il divisore deve essere diverso da zero, cioè non si deve annullare neanche il numeratore della frazione, quindi $x\neq -1\wedge x\neq +1$. Semplifichiamo i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{(x-1)\cdot(x+1)}$

Riduciamo allo stesso indice: il m.c.m. degli indici è 12 $\sqrt[12]{\left[\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4}:\sqrt[12]{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$

Poniamo sotto la stessa radice $\sqrt[12]{\dfrac{x^8}{(x-1)^8}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^8}{(x-1)^{11}\cdot(x+1)^3}}$.

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali

98 $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$

99 $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt{50}$ $\qquad$ $\sqrt{40}:(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})$

100 $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{45}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{9}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{6}:\sqrt[5]{12}$

101 $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[6]{81}:\sqrt[6]{9}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}$ $\qquad$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

102 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

103 $\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}:\sqrt[4]{\frac{2}{25}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$ $\qquad$ $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^3}$

104 $\left(\sqrt[3]{\frac{42}{13}}:\sqrt[3]{\frac{91}{36}}\right):\sqrt{13}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{24}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

105 $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[10]{2^4}$ $\qquad$ $\sqrt{15}\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{8}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

106 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

107 $\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}}:\sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{12}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$

108 $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{12a}$ con a>0 $\qquad$ $\sqrt{3a}:\sqrt{\frac{1}{5}a}$ con a >0

109 $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^2}$ $\qquad$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$

110 $\sqrt{\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^6b}{2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}a}:\sqrt[6]{3a}$

111 $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[5]{ay}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{(x+1)^2}:\sqrt{x-1}$

112 $\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a+b}$ $\qquad$ $\sqrt{a^2-3a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

113 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}:\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$

114 $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}:\sqrt{\frac{2}{a}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+1}{a-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}}$

115 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}}$ $\qquad$ $\sqrt{a^4b}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$

116 $\sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}:\sqrt{x+y}$

117 $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ $\quad$ *R.* $\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{4a^4-9}\cdot\sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$

118 $\sqrt{\frac{9-a^2}{(a+3)^2}}\cdot\sqrt{\frac{27+9a}{3-a}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}}$

119 $\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}}\cdot\sqrt[6]{a^2-4b^2}$

120 $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}$ $\qquad$ *R.* $\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$

121 $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$

►11. Potenza di radice e radice di radice

Per elevare a potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, le radici in esponenti con indici frazionari:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Esempi

- $\left(\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2^2}=2$
- $\left(\sqrt[3]{2\mathrm{a}b^2c^3}\right)^2=\sqrt[3]{4\mathrm{a}^2b^4c^6}$

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$.

Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Esempi

- $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[2\cdot 2]{2}=\sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2\mathrm{x}}}=\sqrt[12]{2\mathrm{x}}$

122 $\left(\sqrt{3}\right)^2$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ $\left(\sqrt{4}\right)^2$ $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$

123 $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ $\left(5\sqrt{2}\right)^2$ $\left(-2\sqrt{5}\right)^2$

124 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2$ $\left(a\sqrt{2a}\right)^2$ $\left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$

125 $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(3\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9}\right)^3$

126 $\left(\sqrt{3}\right)^3$ $\left(2\sqrt{5}\right)^3$ $\left(3\sqrt{2}\right)^3$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

127 $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^5$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ $\left(\sqrt[6]{3}\right)^4$

128 $\left(\sqrt[6]{3ab^2}\right)^4$ $\left(\sqrt[4]{16a^2b^3}\right)^2$ $\left(\sqrt[3]{6a^3b^2}\right)^4$ $\left(\sqrt[3]{81ab^4}\right)^4$

129 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$ $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$

130 $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ $\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}}$

131 $\sqrt{\sqrt[3]{3a}}$ $\sqrt{\sqrt[4]{3ab}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}$ $\sqrt[4]{\sqrt{(2\mathrm{a})^5}}$

132 $\sqrt{2(a-b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}$ $\sqrt{3(a+b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}}$

►12. Portare un fattore dentro il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice bisogna elevarlo all'indice della radice:

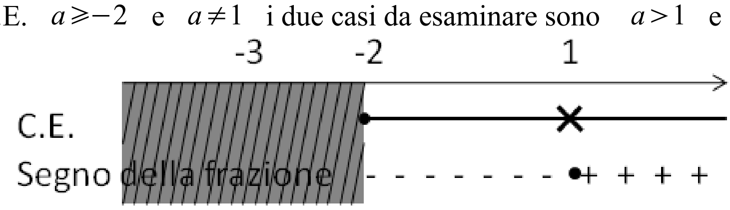
$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ pari e } \; a\geq 0$$
$$a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ pari e } \; a<0$$
$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

Ricordando che abbiamo posto $\sqrt[1]{a}=a$, portare un fattore sotto radice quivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

Esempi

- $2\sqrt[3]{5}$ portare il 2 dentro il segno di radice $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$
- $2\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56}$
- $3\cdot\sqrt{\frac{2}{21}}=\sqrt{3^2\cdot\frac{2}{21}}=\sqrt{9\cdot\frac{2}{21}}=\sqrt{\frac{6}{7}}$.
- $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ lasciamo fuori dalla radice il segno meno $-\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3}=-\sqrt{\frac{3}{4}}$
- $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{12}=-\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 12}=-\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 12}=-\sqrt{\frac{4}{3}}$
- $(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=-(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 3}$
- $-2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-2)^3\cdot 5}=\sqrt[3]{-40}$
- $a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3 b}$ l'indice della radice è dispari pertanto si porta sotto radice senza alcuna condizione.
- $(x-1)\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(x-1)^3\cdot x}$ l'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla x.
- $(x-2)\sqrt{y}$ Intanto osserviamo che il radicale esiste per $y\geq 0$.
  Per portare dentro il segno di radice il coefficiente (x-2) bisogna fare la distinzione:
  $$(x-2)\sqrt{y}=\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2 y} \text{ se } x\geq 2\\ -(2-x)\sqrt{y}=-\sqrt{(2-x)^2 y} \text{ se } x<2\end{cases}$$
- $(x-1)\sqrt{x-2}$ Il radicale esiste per $x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2$, per questi valori il coefficiente esterno (x-1) è positivo e può essere portato dentro la radice $(x-1)\sqrt{x-2}=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$.
- $\frac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}$

Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale. Per l'esistenza della frazione $\frac{a+2}{(a-1)^2}$ deve essere $(a-1)^2\neq 0,$ ovvero $a\neq 1.$. Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per $a\neq 1$) è sufficiente che sia $a+2\geqslant 0$ ovvero $a\geqslant -2$.
Pertanto le condizioni di esistenza sono $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$
Studiamo il segno della frazione algebrica da portare sotto radice. Risulta che tale frazione è positiva per $a<-3\vee a\geqslant 1$ mentre è negativa per $-3<a\leqslant 1$, a=1 la rende nulla.
Tenendo conto delle C.E. $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$ i due casi da esaminare sono $a>1$ e $-2<a<1$.



Se $a>1$ si ha $\frac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$
Se $-2<a<1$ il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi

$$-\left(-\frac{a-1}{a+3}\right)\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{[-(a-1)]^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

Se a=-2 l'espressione da calcolare vale zero.
Il caso a =1 è escluso dalla condizione di esistenza.

►13. Portare uno o più fattori fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si parte da un radicale del tipo:

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{con} \quad m \geq n$$

si divide *m* per *n* e si porta fuori il termine *a* elevato al quoziente *q* della divisione intera, cioè a^q va fuori dalla radice, mentre rimane dentro il segno di radice il termine *a* elevato al resto *r* della divisione intera, cioè a^r resta sotto radice. Quindi si ha:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q \sqrt[n]{a^r}$$

dove *q* è il quoziente della divisione intera *m:n* ed *r* è il resto della stessa divisione.
Si può anche procedere trasformando la potenza a^m nel prodotto di due potenze, una delle quali può essere semplificata con la radice. Per esempio, $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$
Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} \text{ se } n \text{ dispari} \\ |a|\sqrt[n]{b} \text{ se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt{1200}$ Si scompone in fattori primi il radicando $1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$ ne segue allora che $\sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$
- $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$
- $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$
- $\sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2}$ bisogna mettere a in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva.
- $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3}$ Portare fuori dal segno di radice il maggior numero di fattori.

Occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice.
Cominciamo da a^5 risulta 5:3 = quoziente 1, resto 2; per b^7 si ha 7:3 = quoziente 2, resto 1; per c non è possibile portare niente fuori; per d^3 si ha 3:3= quoziente 1, resto 0.
In definitiva $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3} = ab^2 d\sqrt[3]{a^2 bc}$

- $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 x^3 y}{z^6}}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 x^3 y}{z^6}} = 3\dfrac{x}{z^2}\sqrt[3]{y}$
- $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili

Raccogliamo a fattor comune dentro la radice per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:

$\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)}$ C.E. $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

Pertanto $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)} = |x|\sqrt[4]{4(1-x)} = \begin{cases} x\sqrt[4]{4(1-x)} \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x\sqrt[4]{1-x} \text{ se } x < 0 \end{cases}$

- $\sqrt{3(a-1)^2}$ portare fuori dalla radice $\sqrt{3(a-1)^2} = |a-1|\sqrt{3} = \begin{cases} (a-1)\sqrt{3} \text{ se } a > 1 \\ 0 \text{ se } a = 1 \\ (1-a)\sqrt{3} \text{ se } a < 1 \end{cases}$

Trasporta dentro la radice i fattori esterni

133 $2\sqrt{2}$ $\quad 3\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad 3\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt{3}$

134 $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{6}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad 2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ $\quad 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

135 $-3\sqrt{3}$ $\quad -2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}$ $\quad \frac{-1}{5}\sqrt{5}$ $\quad -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$ $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$

136 $x\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\quad x^2\sqrt[3]{x}$ $\quad a\sqrt{2}$ $\quad x^2\sqrt[3]{3}$ $\quad 2a\sqrt{5}$ $\quad a\sqrt{-a}$

137 $(a-1)\sqrt{a}$ $\quad (x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}$ $\quad x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$

138 $\frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}$ $\quad \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}-x}$ $\quad \frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$

Semplifica i radicali portando fuori dei fattori

139 $\sqrt{250}$ $\quad R.[5\sqrt{10}]$ $\quad \sqrt{486}$ $\quad R.[9\sqrt{6}]$

140 $\sqrt{864}$ $\quad R.[12\sqrt{6}]$ $\quad \sqrt{3456}$ $\quad R.[24\sqrt{6}]$

141 $\sqrt{20}$ $\quad \sqrt{0,12}$ $\quad \sqrt{45}$ $\quad \sqrt{48}$

142 $\sqrt{98}$ $\quad \sqrt{50}$ $\quad \sqrt{300}$ $\quad \sqrt{27}$

143 $\sqrt{75}$ $\quad \sqrt{40}$ $\quad \sqrt{12}$ $\quad \sqrt{80}$

144 $\sqrt{\frac{18}{80}}$ $\quad \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{9}}$ $\quad \sqrt{1-\frac{9}{25}}$ $\quad \sqrt{\frac{10}{3}+\frac{2}{9}}$

145 $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}$ $\quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}$ $\quad \frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}}$ $\quad \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$

146 $\sqrt[3]{250}$ $\quad \sqrt[3]{24}$ $\quad \sqrt[3]{108}$ $\quad \sqrt[4]{32}$

147 $\sqrt[4]{48}$ $\quad \sqrt[4]{250}$ $\quad \sqrt[5]{96}$ $\quad \sqrt[5]{160}$

148 $\sqrt{x^2 y}$ $\quad \sqrt{\frac{a^5}{b^2}}$ $\quad \sqrt{\frac{a^2 b^3 c^3}{d^9}}$ $\quad \sqrt{4ax^2}$

149 $\sqrt{9a^2 b}$ $\quad \sqrt{2a^2 x}$ $\quad \sqrt{x^3}$ $\quad \sqrt{a^7}$

150 $\sqrt[3]{16a^3 x^4}$ $\quad \sqrt[3]{4a^4 b^5}$ $\quad \sqrt[3]{27a^7 b^8}$ $\quad \sqrt{18a^6 b^5 c^7}$

151 $\sqrt{a^2+a^3}$ $\quad \sqrt{4x^4-4x^2}$ $\quad \sqrt{25x^7-25x^5}$ $\quad \sqrt[3]{3a^5 b^2 c^9}$

152 $\sqrt[4]{16a^4 b^5 c^7 x^6}$ $\quad \sqrt[5]{64a^4 b^5 c^6 d^7}$ $\quad \sqrt[6]{a^{42} b^{57}}$ $\quad \sqrt[7]{a^{71} b^{82}}$

153 $\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^7}$ $\quad R.[(a+a^2+a^3)\sqrt{a}]$

►14. Somma di radicali

Si dice **radicale** un'espressione del tipo $a\sqrt[n]{b}$ con a e b numeri reali, b≥0 ed n∈N. Il numero a prende il nome di **coefficiente** del radicale.
Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

DEFINIZIONE. Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili e si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

- $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
- $2\sqrt{45}-\sqrt{80}=2\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Attenzione quindi a non scrivere scritture errate come la seguente $\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}}_{\text{ERRATO}}$.

Esempi

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
- $\frac{1}{2}\sqrt{7}-\frac{4}{3}\sqrt{7}=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{7}=\frac{3-8}{6}\sqrt{7}=-\frac{5}{6}\sqrt{7}$
- $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ sommiamo tra di loro i radicali simili
  $=(3-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$
- $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$
- $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^6}:\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3\cdot a^2}+\sqrt[4]{a^6:a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}=3\sqrt[4]{a^5}$
- $(1+\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2}-1)=1\cdot 3\sqrt{2}-1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1+3\sqrt{2^2}-\sqrt{2}=$
  $=3\sqrt{2}-1+3\cdot 2-\sqrt{2}=2\sqrt{2}+5$
- $(\sqrt{3}+1)^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{2})=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$
- $(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(3)^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2\cdot 3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
- $(\sqrt{2}+4)\cdot(3-\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot 3+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+4\cdot 3+4\cdot(-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2+12-4\sqrt{2}=10-\sqrt{2}$
- $(\sqrt{2}-3)^3=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2(-3)+3\sqrt{2}(-3)^2+(-3)^3=\sqrt{2^3}+3(2)(-3)+3(9)\sqrt{2}-27=$
  $=2\sqrt{2}-18+27\sqrt{2}-27=29\sqrt{2}-45$

Esegui le seguenti operazioni con radicali

154 $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

155 $8\sqrt{6}-3\sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

156 $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ $\qquad$ $2\sqrt{7}-7\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

157 $11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ $\qquad$ $R.[3(\sqrt{5}+\sqrt{2})]$

158 $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})]$ $\qquad$ $R.[7\sqrt{7}]$

159 $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

160 $3\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$ $\qquad$ $R.\ 3\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$

161 $5\sqrt{10}-(6+4\sqrt{19})+2-\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

162 $-3\sqrt{7}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{7}+8\sqrt{3}$ $\qquad$ $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+6\sqrt{6}-7\sqrt{3}-8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$

163 $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ $\qquad$ $5\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6}+3\sqrt[3]{6}-2\sqrt{6}$

164 $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$ $\qquad$ $R.[\sqrt{3}-\sqrt{2}]$

165 $3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$ $\qquad$ $R.[0]$

166 $3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450})$ $\qquad$ $R.[0]$

167 $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$ $\qquad$ $R.[\sqrt[4]{2}+12\sqrt[3]{2}]$

168 $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$ $\qquad$ $R.[\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3}]$

169 $\sqrt{\frac{32}{25}}-\sqrt{\frac{108}{25}}+\sqrt{\frac{27}{49}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}}$ $\qquad$ $R.[\frac{2}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{7}\sqrt{3}]$

170 $2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}$ $\qquad$ $R.[0]$

171 $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{4}{5}\sqrt{b}-\sqrt{a}+0{,}4\sqrt{b}$ $\qquad$ $R.[-\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{b}]$

172 $6\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-7\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+9\sqrt{b}+\sqrt{a}$ $\qquad$ $R.[9\sqrt{b}-\sqrt{ab}]$

173 $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$ $\qquad$ $R.[(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}]$

174 $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$ $\qquad$ $2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}$

175 $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+b}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{5}\sqrt{x}+0{,}4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$

176 $2a\sqrt{2a}-7a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$ $\qquad$ $3\sqrt{xy}+3\sqrt{x}-3\sqrt{y}+2\sqrt{xy}-3(\sqrt{x}+\sqrt{x})$

177 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$ $\qquad$ $(3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$

178 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ $\qquad$ $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$

179 $(\sqrt{3}+1)^2$ $\quad R.[4+2\sqrt{3}]$ $\qquad$ $(\sqrt{3}-2)^2$ $\quad R.[7+4\sqrt{3}]$

180 $(2+\sqrt{5})^2$ $\quad R.[9+4\sqrt{5}]$ $\qquad$ $(4-\sqrt{3})^2$ $\quad R.[19-8\sqrt{3}]$

181 $(6+2\sqrt{3})^2$ $\quad R.[48+24\sqrt{3}]$ $\qquad$ $\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$ $\quad R.[\frac{27}{4}-\sqrt{18}]$

182 $(\sqrt{2}-1)^2$ $\qquad$ $(2\sqrt{2}-1)^2$

183 $(\sqrt{3}+1)^2$ $\qquad$ $(\sqrt{3}-3)^2$

184 $(\sqrt{5}-2)^2$ $\qquad$ $(2\sqrt{5}+3)^2$

185 $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

186 $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$ $\qquad$ $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

187 $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $R.[8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}]$

188 $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2$ $\qquad$ $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

189 $(\sqrt[3]{2}-1)^3$ $\qquad$ $R.[1+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}]$

190 $(\sqrt[3]{3}+1)^3$ $\qquad$ $(\sqrt[3]{2}-2)^3$

191 $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^3$ $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)$

192 $\left[\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\right]^2$ $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$

193 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}+\sqrt{3}:\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

194 $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{25}$ $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}\right)$

195 $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$

196 $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ $\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$

197 $\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$

198 $\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{7}\right)^2$ $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)^2$

199 $\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ $\left(2x+\sqrt{x}\right)^2$

200 $\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^3$ $\left(2x+\sqrt{x}\right)\left(2x-\sqrt{x}\right)$

201 $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{a}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{a}\right)$

202 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ $R.[x-y]$

203 $\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(2\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$

204 $\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\right)-2\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)$

205 $\left(\sqrt{3}-3\right)^2+\left(\sqrt{3}-3\right)^3+2\sqrt{27}-\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-2\right)$

206 $\left(\sqrt{5}-2\right)^2-\left(2\sqrt{5}+3\right)^2+\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+1\right]\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

207 $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+1\right)^2-\sqrt{35}$

208 $\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

209 $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$

210 $\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

211 $\left(\sqrt{2}-1\right)^3+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\sqrt{2}-1$

212 $2\sqrt{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$

213 $\left(\sqrt{10}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{7}\right)$

214 $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$

215 $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$

216 $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}\right)$

217 $\sqrt{27ax^4}+5x^2\sqrt{75a}$

218 $\sqrt{125}+3\sqrt[6]{27}-\sqrt{45}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{20}+7\sqrt[8]{81}$

219 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[9]{a^8}$

220 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.[\sqrt[5]{b^7}]$

221 $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^3}-\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$

222 $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

223 $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

224 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$

225 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.\left[\sqrt{b}\right]$

226 $\sqrt{\dfrac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\dfrac{a-b}{2a+b}}$

227 $\sqrt{\dfrac{9a}{b}}\sqrt{\dfrac{b^2-2b}{3ab-6a}}$

228 $\sqrt{\dfrac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\dfrac{a+b}{3a-b}}$

229 $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}}$

230 $\sqrt[3]{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}}}}:\sqrt{\frac{a}{a+3}}$ R. $\left[\sqrt[4]{\frac{a}{a+3}}\right]$

231 $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{1}{x^2-31}}}}\cdot\sqrt[4]{x+1}$ R. $\left[\sqrt[8]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}\right]$

232 $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}}$ R. $\left[\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^3}}\right]$

233 $\left(\sqrt{\frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{\frac{ab^5+ab^4}{a}}-2\sqrt{b+1}\cdot\frac{b^2}{(b+1)^2}\right)$ R. $\left[(b-1)^2\sqrt{b+1}\right]$

234 $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[3]{y\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}}$ R. $\left[2\sqrt[3]{y^2}\right]$

235 $\sqrt[4]{\frac{b^2-1}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3b-3}{6b^2}}:\sqrt[6]{\frac{(b-1)^4}{4b^5}}$ R. $\left[\sqrt[12]{\frac{(b+1)^2}{b(b-1)}}\right]$

236 $\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{ab-b}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2-2a+1}{ab+b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}}$ R. $\left[\sqrt[4]{\frac{(a-1)^2}{2}}\right]$

237 $\sqrt[3]{\frac{x^2+2xy+y^2}{x+3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5x}{x^2+6x+9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+y}{5x}}$ R. $\left[\frac{x+y}{x+3}\right]$

238 $\sqrt[3]{\frac{x^2-x}{x+1}}\cdot\sqrt[15]{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}}:\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$ R. $\left[\sqrt[3]{x}\right]$

239 $\sqrt{\frac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{y^3-y^2}}-x\sqrt{\frac{4x+4}{y^3-y^2}}$

240 $\left(\sqrt{\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^3}}+\sqrt{\frac{xy^5+xy^4}{x}}-2\sqrt{y+1}\right):\frac{(y+1)^2}{y^2}$ R. $\left[(y-1)^2\ \sqrt{y+1}\right]$

241 $\sqrt[4]{\frac{a^2-a}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}:\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$ R. $\left[\frac{a}{a+1}\sqrt[12]{\frac{a^2}{(a-1)^3}}\right]$

242 $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}}$ R. $\left[\sqrt[24]{\frac{a^{10}b^{11}(a+b)^{11}}{x^{11}}}\right]$

243 $\sqrt[6]{\frac{1}{x}+4x-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+4x+4}\cdot\sqrt{\frac{x}{4x^2-1}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\frac{2x+1}{2x-1}}\right]$

244 $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}}$ R. $\left[\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}\right]$

245 $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}-2+\frac{3}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9a^2(a+3)}{(a-3)^2}}\right):\sqrt{\frac{a^2-9}{3a}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\frac{27a^3}{a-3}}\right]$

246 $\sqrt[4]{\frac{a^3-a^2}{(a+1)^3}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$ R. $\left[\sqrt[6]{\frac{1}{a(a+1)^2}}\right]$

247 $\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{4y^2}}:\left(\sqrt[6]{\frac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4y^2}}\right)$ R. $\left[\sqrt{2y-1}\right]$

248 $\sqrt[3]{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2}}:\left(\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right)$ R. $\left[\sqrt[6]{4a^2(2a-1)}\right]$

249 $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}}+\sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}}-\sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}$ $R.\left[\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}\right]$

250 $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8\text{x}-8\text{y}}$ $R.[\frac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}]$

251 $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}}+\sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$ $R.\left[\frac{(1+2\text{x})^2}{2\text{x}}\sqrt{x^2+xy+y^2}\right]$

252 $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}}+\sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}}-\sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$ $R.[\sqrt{a}]$

253 $\sqrt{4\text{x}-12\text{y}}+\sqrt{\frac{x^3-3\text{x}^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3\text{y}^3}{x^2}}$ $R.[\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3\text{y}}]$

254 $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}$ $R.[(1+a)^2]$

255 $\left(\sqrt[3\text{x}]{y^x\sqrt[4\text{x}]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2\text{x}^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[4\text{x}^2]{\frac{1}{y}}$

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze per poi applicare le proprietà delle potenze:

<u>Esempi</u>

- $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[6]{a^5\cdot b}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a^2b}$
- $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^6b}}{a\sqrt[3]{b}}}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}}=$
  $=a^{\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{9}}=\sqrt[10]{a^3}\cdot\sqrt[9]{b^2}.$
- $\sqrt[6]{\frac{x^3\cdot\sqrt[3]{xy^2}}{x^2-\sqrt{xy}}}=\left(\frac{x^3\cdot(xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2-(xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{x^3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2-x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{x^{\frac{10}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{6}}=$
  $=\left[x^{\frac{17}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{17}{36}}\cdot y^{\frac{1}{9}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}$

256 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}:\sqrt{\frac{1}{a}}$ $R.\left[\sqrt{a^3}\right]$

257 $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}}:\sqrt[7]{a^4\sqrt{a}}$ $R.\left[\sqrt[14]{a^3}\right]$

258 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ $R.\left[\sqrt[9]{a^{19}}\right]$

259 $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.[\sqrt{b}]$

►15. Razionalizzazione del denominatore di un frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformarla in una frazione equivalente avente a denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

I Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di fattore razionalizzante:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=3\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}=\frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}}=\frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1}=\frac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1}=(a+1)\sqrt{a-1}$

II Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con n>m.

In questo caso il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. Infatti si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{(n-m)}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Se abbiamo un esercizio in cui la potenza del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$

  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[4]{x^3a^2b}$

  $\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}=\frac{ab\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{xa^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab}=\frac{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}{x}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{b^5}}=\frac{1}{b\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{b^2}$ con $b\neq 0$.

III Caso: Razionalizzazione del denominatore delle frazioni $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Il fattore razionalizzante nel primo caso è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, nel secondo è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Sviluppiamo solo il primo caso, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Esempi

- $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{5^2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
- $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{9-2}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{7}$
- $\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}=\frac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{(1+\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a^2}}=\frac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a}$

IV Caso: Razionalizzazione del denominatore della frazione $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

Esempio

■ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ il fattore di razionalizzazione è $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2\cdot 6}$ portando fuori radice si ha $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

V Caso: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Per razionalizzare un denominatore di questo tipo si utilizza il prodotto notevole

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ e quello analogo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

Razionalizza i seguenti radicali

260 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad\frac{5}{\sqrt{10}}$ $\quad\frac{10}{\sqrt{5}}$

261 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad\frac{4}{2\sqrt{2}}$ $\quad\frac{3}{\sqrt{27}}$ $\quad\frac{4}{\sqrt{8}}$

262 $-\frac{10}{5\sqrt{5}}$ $\quad\frac{2}{3\sqrt{6}}$ $\quad-\frac{3}{4\sqrt{5}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt{50}}$

263 $\frac{9}{\sqrt{18}}$ $\quad\frac{7}{\sqrt{48}}$ $\quad\frac{3}{\sqrt{45}}$ $\quad\frac{5}{\sqrt{125}}$

264 $\frac{6}{5\sqrt{120}}$ $\quad\frac{1}{3\sqrt{20}}$ $\quad\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}$ $\quad3\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$

265 $\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ $\quad\frac{a}{\sqrt{a}}$ $\quad\frac{x}{\sqrt{x}}$ $\quad\frac{a\,x}{\sqrt{2\,a}}$

266 $\frac{2\,a}{\sqrt{2}}$ $\quad\frac{a}{2\sqrt{a}}$ $\quad\frac{x}{3\sqrt{2\,x}}$ $\quad\frac{x^2}{a\sqrt{x}}$

267 $\frac{3\,x}{\sqrt{12\,x}}$ $\quad\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

268 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ $\quad\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$ $\quad\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$ $\quad\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

269 $\frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ $\quad\frac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}$ $\quad\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ $\quad\frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

270 $\frac{3\,a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ $\quad\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ $\quad\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $\quad\frac{x}{\sqrt{2\,x+1}}$

271 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\quad\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$

272 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\quad\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$

273 $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$ $\quad\frac{6}{5\sqrt[3]{100}}$ $\quad\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ $\quad\frac{3}{2\sqrt[6]{27}}$

274 $\frac{10}{\sqrt[5]{125}}$ $\quad\frac{16}{\sqrt[3]{36}}$ $\quad\frac{9}{\sqrt[4]{2025}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt[5]{144}}$

275 $\frac{a\,b}{\sqrt[3]{a^2\,b}}$ $\quad\frac{a\,b^2}{\sqrt[3]{a\,b^2}}$ $\quad\frac{3\,a^2\,b}{\sqrt[4]{9\,a\,b^3}}$ $\quad\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27\,a\,b^2\,c^5}}$

276 $\frac{5x}{\sqrt[3]{x\sqrt{5}}}$ $\quad\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16\,a^2\,b^3\,c^4}}$ $\quad\frac{\sqrt[3]{x^2\,y}+\sqrt[3]{x\,y^2}}{\sqrt[3]{x\,y}}$ $\quad\frac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9\,a}}$

277 $\frac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4\,a^2\,x}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\quad\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

278 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ $\quad\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ $\quad\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ $\quad\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

279 $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\quad\frac{3}{2+3\sqrt{3}}$ $\quad\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ $\quad\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

280 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $\quad\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{a\,b}}$ $\quad\frac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}$ $\quad\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

281 $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$ $\quad\frac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$ $\quad\frac{a-2}{\sqrt{a}-2}$ $\quad\frac{a-x}{\sqrt{a}-2\sqrt{x}}$

282 $\frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$ $\quad\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\quad\frac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$ $\quad\frac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$

283 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a\,b}}$ $\qquad \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$ $\qquad \dfrac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$

284 $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\qquad \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$

285 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ $\qquad \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

286 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

►16. Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$
In alcuni casi i radicali doppi possono essere trasformati nella somma algebraica di due radicali semplici se l'espressione a^2-b è un quadrato perfetto mediante la seguente formula:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

- $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{49-40}}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-40}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+3}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-3}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-1}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$
$=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
- $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+5}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-5}{2}}=\sqrt{6}+1$.
- $\sqrt{5+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{25-3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{25-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{22}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{22}}{2}}$ la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

287 $\sqrt{12-\sqrt{23}}$ $\qquad \sqrt{12+2\sqrt{5}}$ $\qquad \sqrt{15+\sqrt{29}}$ $\qquad \sqrt{3+\sqrt{5}}$

288 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ $\qquad \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt{4-\sqrt{7}}$ $\qquad \sqrt{5+\sqrt{21}}$

289 $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ $\qquad \sqrt{6-3\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ $\qquad \sqrt{6-\sqrt{11}}$

290 $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ $\qquad \sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\qquad \sqrt{7-\sqrt{33}}$ $\qquad \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

291 $\sqrt{7-\sqrt{13}}$ $\qquad \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ $\qquad \sqrt{8-\sqrt{55}}$ $\qquad \sqrt{8+4\sqrt{3}}$

292 $\sqrt{8-\sqrt{39}}$ $\qquad \sqrt{8-4\sqrt{7}}$ $\qquad \sqrt{8+\sqrt{15}}$ $\qquad \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

293 $\sqrt{\dfrac{15}{2}-\sqrt{\dfrac{86}{9}}}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{8}{5}-\sqrt{\dfrac{7}{4}}}$ $\qquad \sqrt{10+\sqrt{19}}$

►17. Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

Equazioni di primo grado

Esempi

■ $\sqrt{3}x=9$

$\sqrt{3}x=9 \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}} \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

■ $(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6}=2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1$

$\sqrt{3}x-x-\sqrt{6}=2x-3\cdot2-\sqrt{2}+1$ $\quad \sqrt{3}x-x-2x=\sqrt{6}-6-\sqrt{2}+1$ $\quad \sqrt{3}x-3x=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

$x(\sqrt{3}-3)=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

■ $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}$

$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=\frac{\sqrt{18}-3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{-6}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{5}{6}\sqrt{3}+\frac{5}{2}$

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali

294 $\sqrt{2}x=2$ $\quad \sqrt{2}x=\sqrt{12}$ $\quad 2x=\sqrt{6}$ $\quad \sqrt{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{14}$

295 $x-\sqrt{3}=2(x-\sqrt{3})$ $\quad R.[\sqrt{3}]$ $\quad 2\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ $\quad R.[\frac{\sqrt{6}}{3}]$

296 $2x+\sqrt{5}=\sqrt{5}x+2$ $\quad R.[1]$ $\quad (1+\sqrt{2})x=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ $\quad R.[4-3\sqrt{2}]$

297 $\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{8}}=x-\sqrt{2}$ $\quad R.[18-12\sqrt{2}]$ $\quad 2x-(x+\sqrt{3})\sqrt{2}x=2x+3\sqrt{5}$ *impossibile*

298 $\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{x-1}{2}$ $\quad R.[-(1+\sqrt{2})]$

299 $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=2$ $\quad$ *impossibile*

300 $(x+\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{3})^2=6$ $\quad R.\left[\frac{-7(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}\right]$

301 $\frac{x-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}-3x}{4}=2x$ $\quad R.\left[-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right]$

302 $2(x-1)^2-\sqrt{2}x=1+2x(x-2)$ $\quad R.\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

303 $\frac{\sqrt{3}}{3x-6}-\frac{1}{20-10x}=\sqrt{3}+2$ $\quad R.\left[\frac{36+17\sqrt{3}}{30}\right]$

304 $\frac{3x-2}{\sqrt{8}x-\sqrt{32}}+\frac{5x}{4\sqrt{3}x-8\sqrt{3}}=0$ $\quad R.\left[\frac{36-10\sqrt{6}}{29}\right]$

Disequazioni di primo grado

Esempio

■ $(\sqrt{3}-1)x \le \sqrt{3}$

$$(\sqrt{3}-1)x \le \sqrt{3} \rightarrow x \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \rightarrow x \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \rightarrow x \le \frac{3+\sqrt{3}}{3-1} \rightarrow x \le \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali

305 $4x+\sqrt{2} < 2x-\sqrt{2}$ — $R. \left[x<-\sqrt{2}\right]$

306 $\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right) < 3\sqrt{2}$ — $R. \left[x>\frac{\sqrt{2}-6}{2}\right]$

307 $x\sqrt{2}+\sqrt{5} > \sqrt{10}$ — $R. \left[x>\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}\right]$

308 $3\left(x-\sqrt{3}\right) < 2\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}$ — $R. \left[x<5\sqrt{3}-\sqrt{6}\right]$

309 $\frac{x-\sqrt{2}}{2} \le \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ — $R. \left[x \ge \frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}\right]$

310 $\begin{cases} \sqrt{2}x \ge 2 \\ \left(3-\sqrt{2}\right)x < \sqrt{2} \end{cases}$ — *impossibile*

311 $\begin{cases} 2\left(x-\sqrt{2}\right) > 3x-\sqrt{3} \\ \left(x-\sqrt{2}\right)^2 > \left(x-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3} \end{cases}$ — $R. \left[\frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < x < \sqrt{3}-2\sqrt{2}\right]$

Sistemi di primo grado

Esempio

■ $\begin{cases} x(2+\sqrt{2})+y=\sqrt{2}(2+x) \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases}$ risolviamolo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{2}x+y=2\sqrt{2}+\sqrt{2}x \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+\cancel{\sqrt{2}x}+y=2\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{2}x} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=2\sqrt{2}-y \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\sqrt{2}y+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\cancel{\sqrt{2}y}+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\sqrt{2}y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y+2y}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ 2\sqrt{2}-y+2y=-\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=2\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$$

Risolvi i seguenti sistemi a coefficienti irrazionali

312 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5\\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=2\sqrt{6}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3}\right)$ $\begin{cases}x-\sqrt{3}=2-y\\ x+2=y+\sqrt{3}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{3};\ 2\right)$

313 $\begin{cases}x+2y=\sqrt{2}-1\\ 2x-2y=2\sqrt{2}\end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -1\right)$ $\begin{cases}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{2x-y}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ R. $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}\right)$

314 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=2\\ \sqrt{3}x-4y=1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$ $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=1\\ 2x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

315 $\begin{cases}4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}x+y=-2\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

316 $\begin{cases}\sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4\\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8\end{cases}$ indeterminato

317 $\begin{cases}2x+3\sqrt{2}y=2\\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8}\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

318 $\begin{cases}x+y=3\sqrt{5}\\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11}\end{cases}$ impossibile

319 $\begin{cases}x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27}\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

320 $\begin{cases}\sqrt{2}x+2y=4\\ 2x+\sqrt{32}y=-1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

321 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=2\\ \sqrt{3}x-4y=1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$

322 $\begin{cases}4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}x+y=-2\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

323 $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=1\\ 2x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

324 $\begin{cases}2x+3\sqrt{2}y=2\\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8}\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

325 $\begin{cases}\sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4\\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8\end{cases}$ indeterminato

326 $\begin{cases}x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27}\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

327 $\begin{cases}x+y=3\sqrt{5}\\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11}\end{cases}$ impossibile

328 $\begin{cases}\sqrt{2}x+2y=4\\ 2x+\sqrt{32}y=-1\end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

►18. Esercizi di riepilogo

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se è Vera o Falsa.

329 É dato un quadrato di lato $3\sqrt{2}$.

a) Il suo perimetro è in numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero irrazionale V F

330 É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza 14.

a) Il suo perimetro è un numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero razionale V F
c) Il perimetro non esiste perché non si sommano numeri razionali con numeri irrazionali V F
d) La misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale V F

331 Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{13}$ cm.

a) L'ipotenusa ha come misura un numero razionale V F
b) Il perimetro è un numero irrazionale V F
c) L'area è un numero irrazionale V F

332 É dato un quadrato di lato $1+\sqrt{5}$

a) La misura della diagonale è in numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F

333 É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza $\sqrt{3}$.

a) Il perimetro è un numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F
c) La misura della diagonale è un numero irrazionale V F
d) Il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale V F

334 Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.

335 Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-5)^2}=-5$ è falsa?

336 Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni

a) La radice terza del triplo di *a* è uguale ad *a*. V F
b) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
c) Il doppio della radice quadrata di a è uguale alla radice quadrata del quadruplo di a. V F
d) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
e) La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. V F
f) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
g) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
h) Dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. V F
i) Sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. V F

337 Riscrivi in ordine crescente i radicali $\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3}$

338 Verifica che il numero irrazionale $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ appartiene all'intervallo (2; 3) e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

339 Sono assegnati i numeri $\alpha=\sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{30}+\sqrt{3})}+\sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17})\cdot(7\sqrt{2}-\sqrt{17})}$ e $\beta=(3+\sqrt{43})\cdot(3-\sqrt{5})-\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$, quali afffermazioni sono vere?

[A] sono entrambi irrazionali [B] solo α è irrazionale [C] α è minore di β
[D] α è maggiore di β [E] β è irrazionale negativo

340 Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali $l_1=\sqrt[3]{1-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt[3]{25}$ e $l_2=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot(\sqrt[8]{6})^3:\sqrt[4]{\sqrt{6}}$. Determinare la misura del perimetro e della diagonale del reattangolo.

341 Se x è positivo e diverso da 1, l'espressione $E=\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}-\frac{4}{\sqrt{x}+1}}:\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}+\frac{4}{\sqrt{x}+1}}$ è uguale a:

[A] $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ [B] $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$ [C] $\frac{1}{x}$ [D] $\sqrt[8]{x}$ [E] 0

342 Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie (a,b) di numeri reali positivi con a=3b, l'espressione $E=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a+b}{a-b}$ ha il numeratore doppio del denominatore.

343 *Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere*

a) $x+2\sqrt{3}$ per $x=\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}x+3\sqrt{6}$ per $x=\sqrt{3}$
c) x^2+x-1 per $x=\sqrt{2}$
d) $x^2+\sqrt{5}x-1$ per $x=\sqrt{5}$
e) $(x+2\sqrt{2})^2$ per $x=\sqrt{2}$

344 Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}}:\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1}$

Risolvi le equazioni

345 $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3x+3}{\sqrt{3}}$ $R.[-1]$

346 $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}}+\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=2$ $R.[2\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})]$

347 Per quale valore di *k* il sistema lineare è determinato?

$$\begin{cases} x\sqrt{3}+(k-\sqrt{3})y=1 \\ -2x+y\sqrt{6}=-k \end{cases}$$

348 L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<0$ è:

[A] $x\geq 0$ [B] $x\leq 0$ [C] $x>0$ [D] $x<0$ [E] sempre verificata.

349 Stabilire se esistono valori di a che rendono positiva l'espressione:

$$E=\frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}-1$$

350 Data la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) Determina il suo dominio,
b) Riscrivi la funzione razionalizzando il denominatore,
c) Calcola f(2),
d) Per quali valori di x si ha f(x)>0?
e) Risolvi l'equazione f(x)=0

Autori

Erasmo Modica: teoria, esercizi
Antonio Bernardo: teoria, esercizi
Claudio Carboncini: esercizi
Cristina Mocchetti: integrazioni, correzioni
Germano Pettarin: esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Nicola Chiriano: correzioni
Luciano Sarra: correzioni
Gemma Fiorito: correzioni, risultati esercizi
Raffaele Santoro: teoria, esercizi
Gavino Napoletano: teoria, esercizi
Livia Noris: integrazioni
Roberto Capancioni: indicazioni
Riccardo Sala: correzioni
Daniela Hérin: correzioni
Lucia Rapella: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 15.06.2012