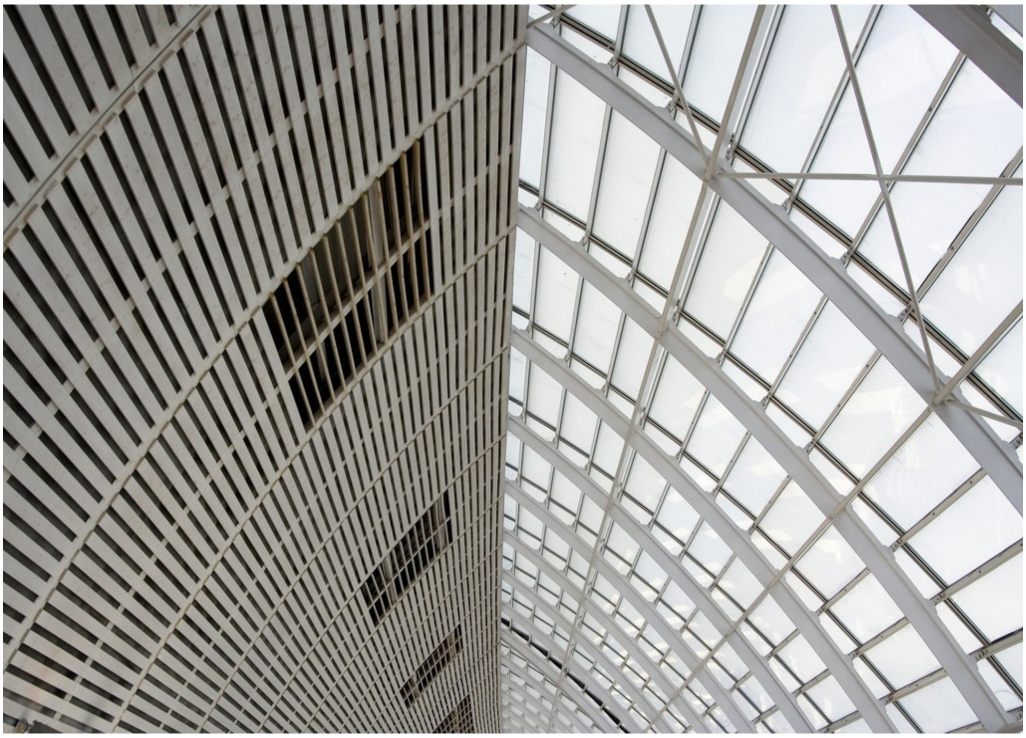
MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

8. Vettori e Funzioni Circolari



Avignon TGV 3 by Nelson Minar
http://www.flickr.com/photos/nelsonminar/293125466/

Indice

1. VETTORI

►1. Prime definizioni

Sappiamo che due punti A e B presi su una retta determinano il segmento di estremi A e B; fissiamo su di esso un verso di percorrenza, per esempio da A verso B.

DEFINIZIONE: il **segmento orientato** di estremi A e B si chiama **vettore**; esso viene indicato con $\vec{AB}$ oppure con $\vec{u}$; il punto A è il primo estremo e B il secondo estremo.

Un **vettore libero** è caratterizzato da tre elementi:

- la **direzione** indicata dalla retta su cui giace;
- il **verso** indicato dalla punta della freccia che dal primo estremo va al secondo estremo;
- il **modulo o intensità,** uguale alla misura del segmento AB: scriveremo $|u| = \overline{AB}$ e leggeremo “il modulo del vettore u è uguale alla misura del segmento AB”.

Un **vettore applicato** è caratterizzato oltre che dai tre elementi suddetti anche dal **punto di applicazione**, ovvero il primo estremo del vettore.

Esempio

I due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$ in figura 1 appartengono alla stessa retta, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e modulo diverso.

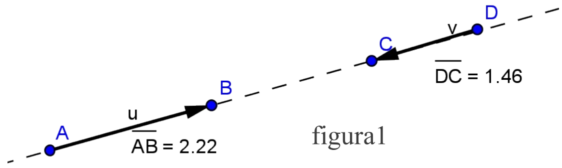


figura1

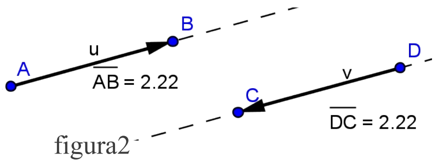


figura2

I vettori $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$ in figura 2 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e uguale intensità: essi si chiamano **vettori opposti** e scriveremo $\vec{AB} = -\vec{DC}$.

I vettori $\vec{AB}$ e $\vec{DD'}$ in figura 3 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, lo stesso verso e uguale intensità: essi si chiamano **vettori equipollenti** e scriveremo $\vec{AB} \equiv \vec{DD'}$.

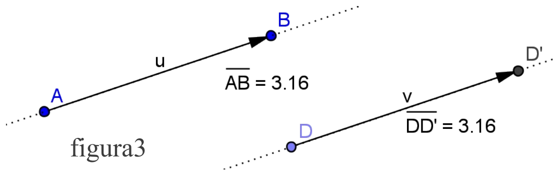
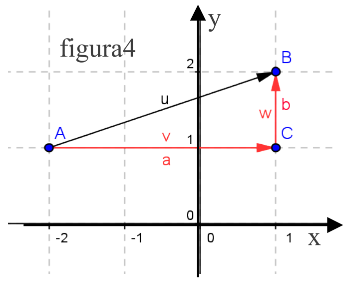


figura3

Osserviamo che un vettore può essere interpretato come uno spostamento dal primo estremo al secondo estremo, avente la direzione della retta cui appartiene il vettore stesso e il verso quello indicato dalla freccia.

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale (figura 4) è rappresentato il vettore $\vec{AB}$ avente il primo estremo nel punto A(-2;1) e il secondo estremo in B(1;2). Per andare da A a B si possono compiere diversi percorsi: possiamo procedere sul vettore u oppure possiamo scegliere di compiere due spostamenti particolari, uno parallelo all’asse x e l’altro parallelo all’asse y. In tal modo si determina il punto C(1;1) come “tappa intermedia” per raggiungere B: ci spostiamo sul vettore $\vec{AC}$ e poi da C sul vettore $\vec{CB}$.

figura4



DEFINIZIONE. Chiamiamo **componenti** del vettore $\vec{AB}$ **le misure con segno dei segmenti AC e CB** con la precisazione di assegnare il segno + alle misure dello spostamento avente lo stesso verso degli assi coordinati e segno – se il verso è opposto a quello degli assi coordinati.

In figura4 le componenti del vettore assegnato sono positive in quanto sia lo spostamento orizzontale che quello verticale avvengono nello stesso verso degli assi coordinati. Scriveremo $\vec{AB}(+3;+1)$

Tutti i vettori del piano cartesiano di coordinate $(+3;+1)$ sono equipollenti ad $\vec{AB}$. Ciò che li distingue in modo univoco è il loro punto di applicazione.

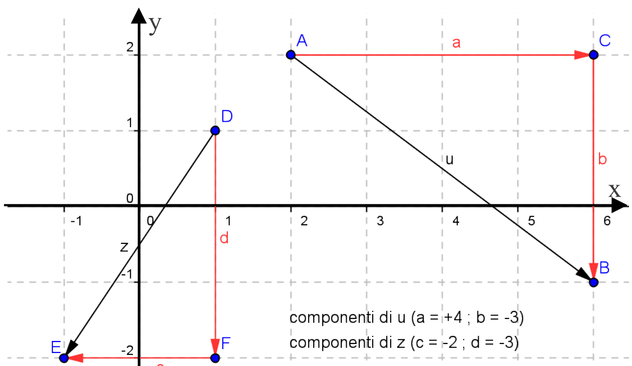


figura 5

Esempio

Il vettore $\vec{z}$ della figura 5 ha componenti entrambe negative poiché lo spostamento orizzontale e quello verticale avvengono in verso contrario rispetto al verso degli assi coordinati: scriveremo $z(-2;-3)$

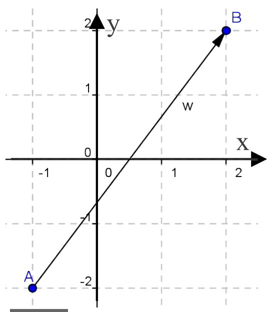
Il vettore u della figura 5 ha la componente lungo l'asse x positiva e negativa la componente verticale: scriveremo $\vec{u}(+4;-3)$.

Regola per determinare le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$, note le coordinate cartesiane degli estremi $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$:

- dal primo estremo tracciamo la parallela all'asse x e dal secondo estremo la parallela all'asse y determinando il punto $C(x_B;y_A)$,
- calcoliamo le misure con segno $a=x_B-x_A;\ b=y_B-y_A$,
- scriviamo $\vec{v}(a;b)$.

Ottenute le componenti si determina il **modulo del vettore** utilizzando il teorema di Pitagora, si ha infatti $|\vec{u}|=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$; il rapporto $\frac{b}{a}=m_{(\vec{u})}$ indica la **direzione del vettore.**

1 Assegnato il vettore della figura, determinate le sue componenti, il modulo e la direzione.

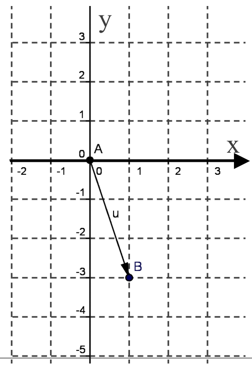


Completate i passi indicati nella strategia risolutiva:
scrivete le coordinate degli estremi del vettore assegnato A(…;…) e B(…;…)
individuate le componenti del vettore $\vec{w}$

- segnate il punto C; calcolate $a=x_B-x_A$ e $b=y_B-y_A$
- le componenti del vettore sono $\vec{w}(\ldots;\ldots)$

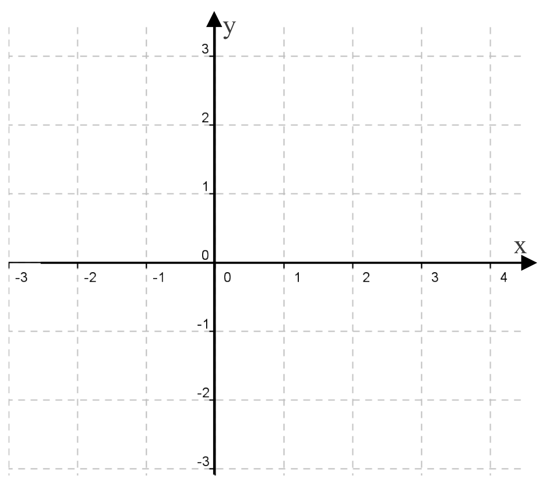
determinate il modulo del vettore $|\vec{w}|=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
determinate la direzione del vettore $m_{(\vec{w})}=\ldots\ldots\ldots$

2 Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il vettore $\vec{v}(1;-3)$. Nella richiesta di questo quesito sembra manchi qualcosa: conosciamo le componenti del vettore, ma dove mettiamo il primo estremo? Provate a mettere il primo estremo in ciascuno dei seguenti punti $A_1(-1;2);\ A_2(1;0);\ A_3(3;-2)$ e determinate il secondo estremo di ciascun vettore; completate indicando per ciascuno il modulo e la direzione.
È vero che tutti i vettori tracciati sono equipollenti?
In figura è rappresentato il vettore equipollente a quelli costruiti avente il primo estremo nell'origine del riferimento.



Conclusione: quando si assegna un vettore mediante le sue componenti collocheremo il primo estremo nell'origine del riferimento cartesiano ortogonale e il secondo estremo (punta della freccia) avrà come coordinate le componenti del vettore in questione.

3 Segnate nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{v}(1;2)$ e $\vec{w}(3;-1)$. Possiamo affermare che $|\vec{w}|=2\cdot|\vec{v}|$?



►2. Operazioni con i vettori

Nel punto A del piano sono applicati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$: dall'estremo B si traccia la retta parallela ad AC e da C la parallela ad AB e si indica con D il loro punto di intersezione.
Il vettore $\overrightarrow{AD}$ individuato dalla diagonale AD del parallelogrammo è la **somma dei vettori** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e si scrive $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

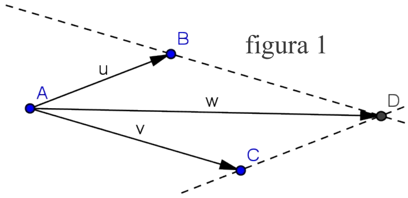


figura 1

Nota storica. Nella sua opera "Philosophiae naturalis principia mathematica" del 1682, Isaac Newton (1642-1727) nel primo corollario alle leggi del moto, scrive: "*un corpo spinto da due forze congiunte descriverà la diagonale di un parallelogramo nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati*".

4 Provate a giustificare la seguente affermazione: "L'operazione di addizione definita secondo la regola del parallelogrammo gode della proprietà commutativa".
Illustriamo con un esempio che vale anche la **proprietà associativa**; dimostriamo che vale $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

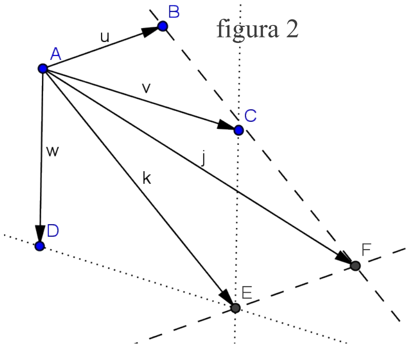


figura 2

Nella figura 2 è realizzata la costruzione $\vec{v} + \vec{w} = \vec{k}$ e $\vec{u} + \vec{k} = \vec{j}$

Nella figura 3 è realizzata la costruzione $\vec{u} + \vec{v} = \vec{z}$ e $\vec{z} + \vec{w} = \vec{j}$

sovrapponendo le due figure si può constatare che i vettori $\vec{j}$ risultanti coincidono.

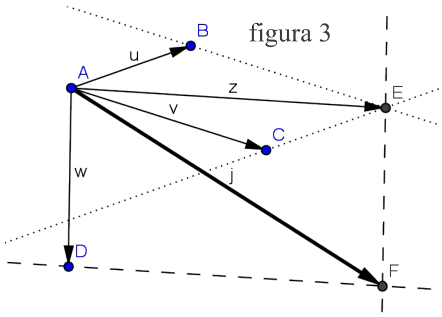


figura 3

Osserviamo che la validità della proprietà associativa ci permette di costruire la somma di più vettori.
Per come è definita l'operazione di somma, pensando al vettore come rappresentante di uno spostamento dal primo estremo al secondo, possiamo interpretare la figura 1 come lo spostamento di un punto prima da A fino a B e poi da questo fino a D, essendo $\overrightarrow{BD}$ un vettore equipollente ad $\overrightarrow{AC}$. Quindi possiamo affermare che il vettore somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si può determinare prendendo due vettori AB e BC rispettivamente equipollenti ai dati; se $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} \equiv \vec{v}$ (figura 4) allora la somma è il vettore $\overrightarrow{AC}$, avente A come primo estremo e C, ultimo estremo del secondo vettore, come secondo estremo.

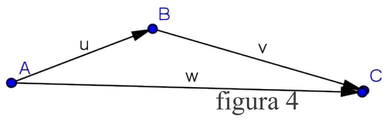


figura 4

Pertanto la somma di più vettori si può semplicemente determinare scegliendo per ogni addendo il vettore equipollente avente il primo estremo nell'estremo finale dell'addendo precedente: la somma è il vettore avente il primo estremo nel punto iniziale del primo addendo e l'estremo finale nel secondo estremo dell'ultimo addendo $\vec{z} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{s}$ (figura5)
Abbiamo visto come si costruisce geometricamente il vettore somma di vettori; vediamo come si determinano le componenti del vettore somma se la questione è posta nel riferimento cartesiano ortogonale.

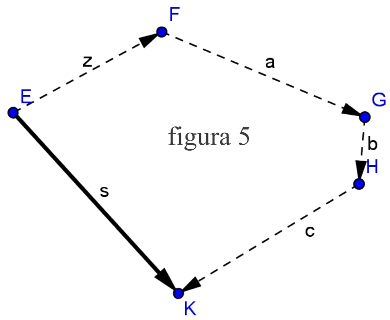
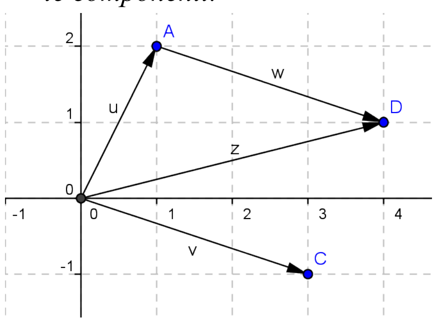


figura 5

Esempio

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale costruiamo il vettore somma dei vettori $\vec{u}(1,2)$ *e* $\vec{v}(3;-1)$ *e determiniamone le componenti.*



Strategia risolutiva:

- costruiamo il vettore $\vec{w}$ equipollente al vettore $\vec{v}$ applicato al punto A;
- determiniamo il punto D(4,1)
- costruiamo il vettore $\vec{z} = \vec{u} + \vec{w}$ di coordinate $\vec{z}(4;1)$

Osserviamo che il primo passo realizzato ci permette di affermare $x_z = x_u + x_v$ e $y_z = y_u + y_v$.

Regola per determinare le componenti cartesiane del vettore $\vec{z}=(x_z ; y_z)$, note le componenti cartesiane degli addendi $\vec{u}=(x_u ; y_u)$ e $\vec{v}=(x_v ; y_v)$.

Il primo passo realizzato nella costruzione precedente ci permette di affermare che le componenti del vettore somma sono la somma delle componenti dei vettori addendi:

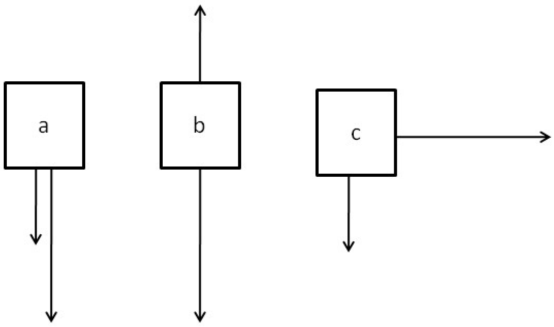
$$x_z=x_u+x_v \quad \text{e} \quad y_z=y_u+y_v \; .$$

5 Determinate il vettore $\vec{z}=\vec{u}+\vec{w}$ essendo $\vec{u}=(-1;-3)$ e $\vec{v}=(2;-1)$. Determinate inoltre il modulo di $\vec{z}$ e la sua direzione. Potete affermare che $|\vec{z}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$?

Applicazioni dei vettori

I vettori sono degli enti geometrici, essi sono utilizzati in fisica per rappresentare tutte le grandezze che sono definite conoscendo modulo, direzione, verso e punto di applicazione. Esempi di grandezze vettoriali sono: la velocità, l'accelerazione, la forza, la densità di corrente elettrica.

6 Nella figura seguente è rappresentata una scatola vista dall'alto, su di essa agiscono due forze, calcola la forza risultante in ognuno dei casi della in figura, sapendo che una forza misura 4N e l'altra 9N



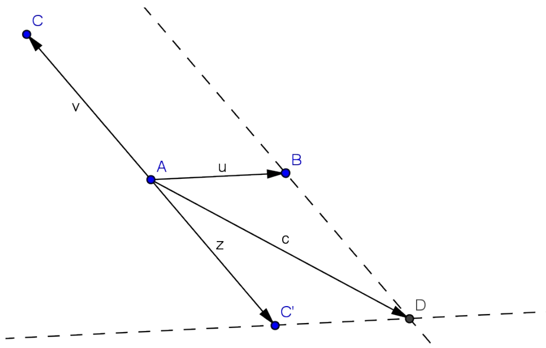
Svolgimento

a) I due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso quindi la risultante si ottiene addizionando i due moduli: $|\vec{r}|=4\,N+9\,N=13\,N$

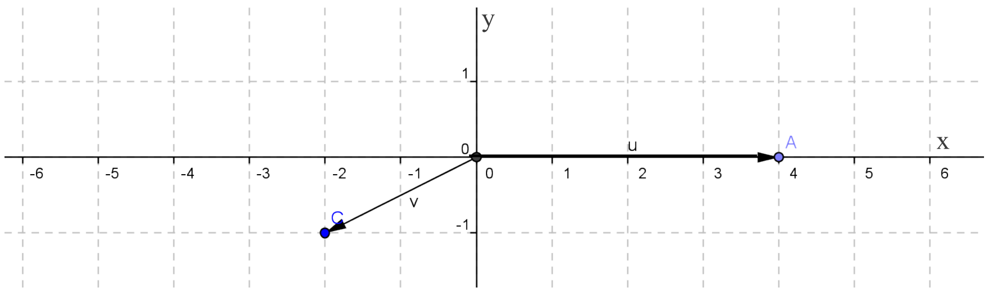
b) Poiché i vettori sono opposti come verso si procede sottraendo al vettore maggiore il vettore minore e la forza risultante ha la direzione ed il verso del vettore di modulo maggiore: $|\vec{r}|=9\,N-5\,N=4\,N$

c) I due vettori hanno direzioni perpendicolari in questo caso il vettore somma si ottiene con il metodo del parallelogrammo, quindi applicando il teorema di Pitagora: $|\vec{r}|=\sqrt{(4\,N)^2+(9\,N)^2}$

Per determinare la **differenza tra due vettori** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si procede nel seguente modo:
costruiamo il vettore $\vec{z}=-\vec{v}$
determiniamo con la regola del parallelogrammo $\vec{u}+\vec{z}=\vec{c}$
Il vettore ottenuto è la differenza tra i vettori assegnati: $\vec{c}=\vec{u}-\vec{v}$



7 Sono assegnati i vettori $\vec{u}(4;0)$ e $\vec{v}(-2;-1)$.
Determinare $\vec{d}_1=\vec{u}-\vec{v}$ e $\vec{d}_2=\vec{v}-\vec{u}$. Cosa osservate?



Moltiplicazione di un numero reale per un vettore

Assegnato un numero reale r e un vettore $\vec{v}$ il prodotto $r \cdot \vec{v}$ è un vettore $\vec{p}$ avente

- la stessa direzione del vettore $\vec{v}$,
- intensità o modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il valore assoluto di r: $|\vec{p}|=|r| \cdot |\vec{v}|$,
- verso uguale al verso di $\vec{v}$ se r è positivo, verso opposto a quello di $\vec{v}$ se r è negativo.

Esempio

Nella figura 6 è rappresentato il vettore $\vec{v}$ e altri vettori ottenuti moltiplicandolo per un numero reale: $\vec{a}=2 \cdot \vec{v}\ ;\ \vec{b}=-\frac{3}{2} \cdot \vec{v}\ ;\ c=\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

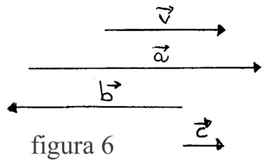


figura 6

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale rappresentiamo il vettore $\vec{u}(4\,;1)$; le componenti del vettore $\vec{p}=-2 \cdot \vec{u}$ si ottengono moltiplicando per –2 le componenti del vettore dato $\vec{p}(-8\,;-2)$, $\vec{p}$ e $\vec{u}$ hanno la stessa direzione essendo $m_{(\vec{u})}=\frac{1}{4}=m_{(\vec{p})}$ e anzi appartengono alla stessa retta avendo in comune il punto di applicazione. In generale $\vec{u}(x_u\,;y_u) \rightarrow r \cdot \vec{u}=\vec{p}(r \cdot x_u\,;r \cdot y_u)$ e $m_{(\vec{u})}=m_{(\vec{p})}$

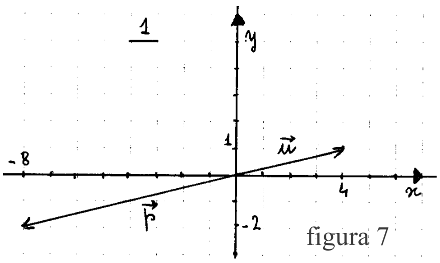


figura 7

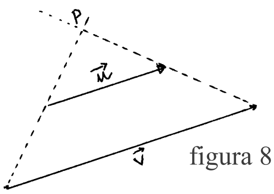
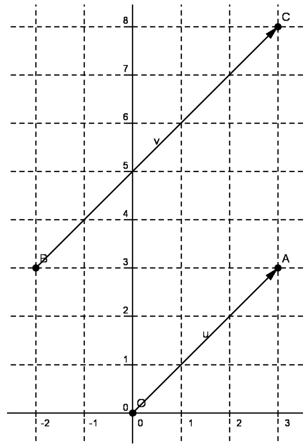


figura 8

Osservazione: "se due vettori hanno la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele (non coincidenti), si può sempre trovare un numero reale r tale che uno sia r volte l'altro". La figura 8 può suggerirvi come giustificare l'osservazione precedente.



8 Nel riferimento cartesiano ortogonale sono rappresentati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$; completate:

a) Il vettore $\vec{u}$ è applicato nell'origine e ha componenti…………
b) Il vettore $\vec{v}$ ha il primo estremo in B(…. , …..) e il secondo in ……………….. pertanto le sue componenti sono ……………..
c) $m_{(\vec{u})}=\ldots\ldots$ e $m_{(\vec{v})}=\ldots\ldots$ pertanto essi sono ………..
d) $|\vec{u}|=\ldots\ldots$ e $|\vec{v}|=\ldots\ldots$
e) determinate r in modo che $\vec{v}=r \cdot \vec{u}$

9 Determinate le componenti del vettore $\vec{w}=2 \cdot \vec{v}$ essendo $\vec{v}\left(\frac{3}{2}\,;-2\right)$; verificate che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno stessa direzione e $|\vec{w}|=2 \cdot |\vec{v}|$.

10 Verificate che $\frac{3}{2} \cdot (\vec{x}+\vec{y})=\frac{3}{2} \cdot \vec{x}+\frac{3}{2} \cdot \vec{y}$ essendo $\vec{x}\left(-\frac{5}{4}\,;1\right)$ e $\vec{y}=(4\,;-1)$.

11 Sono assegnati i vettori $\vec{x}\left(\frac{1}{2}\,;1\right);\ \vec{y}(-3\,;-1);\ \vec{z}(0\,;3)$. Costruite i vettori:

$\vec{p}_1=2 \cdot \vec{x}-\vec{y}\ ;\ \vec{p}_2=2 \cdot (\vec{z}+\vec{y})\ ;\ \vec{p}_3=-\frac{3}{2}\vec{z}+2 \cdot \vec{y}+3 \cdot \vec{x}$ e determinatene le componenti.

►3. Dipendenza e indipendenza lineare

DEFINIZIONE: Diciamo che un vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** di altri vettori $\vec{x};\ \vec{y};\ \vec{z}$ se vale l'uguaglianza: $\vec{v}=r_1\cdot\vec{x}+r_2\cdot\vec{y}+r_3\cdot\vec{z}$; i numeri reali $r_1,\ r_2,\ r_3$ sono i coefficienti della combinazione lineare.

Nell'esercizio precedente hai costruito i vettori $\vec{p}_1;\ \vec{p}_2;\ \vec{p}_3$ eseguendo la somma algebrica di vettori costruiti moltiplicando per numeri reali i vettori assegnati $\vec{x};\ \vec{y};\ \vec{z}$. Possiamo dire che
$\vec{p}_1$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1=2,\ r_2=-1$,
$\vec{p}_2$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{z}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1=2,\ r_2=2$,
$\vec{p}_3$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ i cui coefficienti sono $r_1=-\frac{3}{2},\ r_2=2,\ r_3=3$.

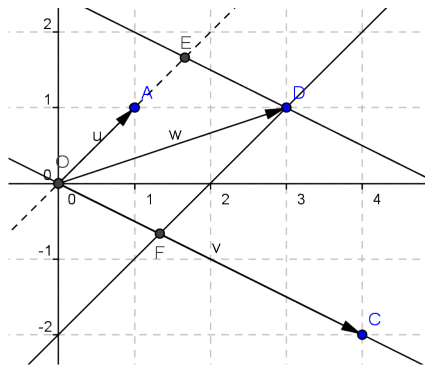
Nell'insieme V di tutti i vettori del piano cartesiano, consideriamo i vettori $\vec{i}(1;0)$ e $\vec{j}(0;1)$ rispettivamente appartenenti all'asse delle ascisse e delle ordinate; possiamo notare che $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$.
Ora ogni vettore $\vec{v}$ del piano può essere scritto come combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$; le sue componenti sono i coefficienti della combinazione lineare con cui si determina $\vec{v}$.

$$\vec{v}(x_v;y_v)=x_v\cdot\vec{i}+y_v\cdot\vec{j}$$

12 Completate le scritture:

$$\vec{v}\left(-\sqrt{2};\frac{5}{4}\right)=\ldots\ldots\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\cdot\vec{j};\ \vec{u}(1;-1)=\ldots\ldots\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\cdot\vec{j}$$
$$\vec{h}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j};\ \vec{z}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)=\frac{3\sqrt{5}}{3}\cdot\vec{i}$$

<u>Esempio</u>



Disegniamo nel riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{u}(1;1),\ \vec{v}(4;-2),\ \vec{w}(3;1)$; ci chiediamo se è possibile scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due.

Il metodo geometrico

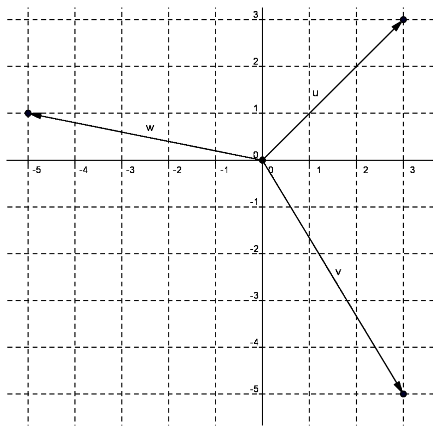
Dobbiamo costruire due vettori $\vec{u}\,'=r_1\cdot u$ e $\vec{v}\,'=r_2\cdot v$ tali che sommati diano il vettore $\vec{w}$.
Dal punto D tracciamo la parallela alla retta OC, che interseca la retta AO nel punto E; dallo stesso punto D tracciamo la parallela alla retta AO che interseca in F la retta OC. I punti E ed F sono gli estremi dei due vettori $\overrightarrow{OE}=r_1\cdot\vec{u}$ e $\overrightarrow{OF}=r_2\cdot\vec{v}$ con $r_1>1$ e $r_2<1$ rispettivamente ottenuti allungando e accorciando $\vec{u}$ e $\vec{v}$: si ha $\vec{w}=r_1\cdot\vec{u}+r_2\cdot\vec{v}$.

Il metodo algebrico

dobbiamo trovare due numeri r_1 e r_2 tali che

$$\vec{w}=r_1\cdot\vec{u}+r_2\cdot\vec{v}\ \rightarrow\begin{cases}3=1\cdot r_1+4\cdot r_2\\1=1\cdot r_1-2\cdot r_2\end{cases}$$ e risolvendo si ottiene

$r_1=\frac{5}{3};\ r_2=\frac{1}{3}$ coerentemente ai risultati della costruzione effettuata.



13 Dati i vettori della figura, applicate il metodo geometrico per determinare i vettori che permettono di scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due.
Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{v}$ come combinazione lineare degli altri due.
Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{u}$ come combinazione lineare degli altri due.

DEFINIZIONE. Dato un insieme V di vettori, questi si dicono **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Altrimenti si dicono **linearmente indipendenti**.

Osserviamo che "altrimenti" nella definizione significa che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

14 I vettori dell'esercizio precedente sono linearmente dipendenti?

15 Spiegate perché i tre vettori $\vec{v}(1,2)$; $\vec{u}(3,1)$ e $\vec{w}(-3,-6)$ sono linearmente dipendenti.

2. INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

►1. Prime definizioni

L'etimologia della parola "trigonometria" dal greco trígonon (τρίγωνον)-triangolo e métron (μέτρον)-misura chiarisce in cosa consiste questa parte della matematica che ci accingiamo ad affrontare.

La **trigonometria** nasce dal problema di **risolvere un triangolo**, cioè di ricavare la misura di alcuni suoi elementi incogniti date le misure di altri elementi. Dal momento che gli elementi di un triangolo sono sei, i tre lati e i tre angoli, vedremo come, date le misure di almeno tre di questi elementi di cui almeno uno sia un lato, sia possibile determinare la misura degli altri tre elementi mancanti.

Disegniamo un triangolo rettangolo retto in A avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto, come nella figura 1 a fianco. Tutte le osservazioni che faremo si riferiscono alla figura 1.
Ricordiamo che tra i lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$ e che ciascun cateto è minore dell'ipotenusa. Ricordiamo anche che gli angoli acuti sono complementari $\hat{C}+\hat{B}=90°$.
Osserviamo che basta conoscere la misura di due lati per determinare la misura del terzo lato, ma queste informazioni non ci permettono di determinare l'ampiezza degli angoli acuti se non in casi particolari. Se conosciamo un angolo acuto e la misura di un lato non possiamo determinare la misura degli altri elementi mancanti.

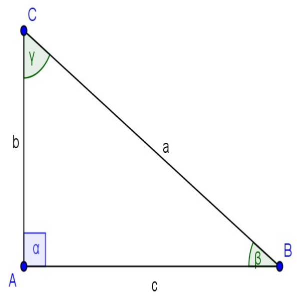


Figura 1

Riferendoci alla figura, chiamiamo cateto adiacente all'angolo acuto β il cateto AB indicato con c e cateto opposto all'angolo β il cateto AC indicato con b.
Introduciamo le seguenti

DEFINIZIONI

$$sen(\beta)=\frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}=\frac{AC}{CB}=\frac{b}{a} \quad \text{da cui} \quad b=a\cdot sen(\beta)$$

$$\cos(\beta)=\frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}=\frac{AB}{CB}=\frac{c}{a} \quad \text{da cui} \quad c=a\cdot \cos(\beta)$$

$$\tan(\beta)=\frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c} \quad \text{da cui} \quad b=c\cdot \tan(\beta)$$

Per l'angolo $\gamma=90°-\beta$ complementare di β:

$$sen(\gamma)=\frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}=\frac{AB}{CB}=\frac{c}{a} \quad \text{da cui} \quad c=a\cdot sen(\gamma)$$

$$\cos(\gamma)=\frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}=\frac{AC}{CB}=\frac{b}{a} \quad \text{da cui} \quad b=a\cdot \cos(\gamma)$$

$$\tan(\gamma)=\frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \quad \text{da cui} \quad c=b\cdot \tan(\gamma)$$

La definizione è ben posta: le funzioni **seno dell'angolo** (sen o sin), **coseno dell'angolo** (cos), **tangente dell'angolo** (tan o tg) dipendono solo dagli angoli e non dal particolare triangolo usato. Infatti angoli acuti della stessa misura appartengono a triangoli rettangoli tutti simili tra loro; siccome i lati di triangoli simili sono in proporzione, il rapporto tra i lati è invariato. Inoltre possiamo certamente affermare che le funzioni seno e coseno di angoli acuti assumono valori positivi minori di 1, poiché in un triangolo rettangolo il cateto è minore dell'ipotenusa.
Dal confronto delle definizioni notiamo che valgono le uguaglianze:

$$sen(\gamma)=\cos(\beta);\ \cos(\gamma)=sen(\beta);\ \tan(\gamma)=\frac{1}{\tan(\beta)}$$ per cui possiamo anche scrivere:

$$sen(x)=\cos(90°-x);\ \cos(x)=sen(90°-x);\ \tan(x)=\frac{1}{\tan(90°-x)}$$

Esempio

- Nel triangolo rettangolo ABC i cateti misurano rispettivamente $AB=4\text{m}$, $AC=3\text{m}$ e l'ipotenusa misura 5m. Possiamo determinare le funzioni goniometriche dei suoi angoli acuti semplicemente applicando le definizioni.

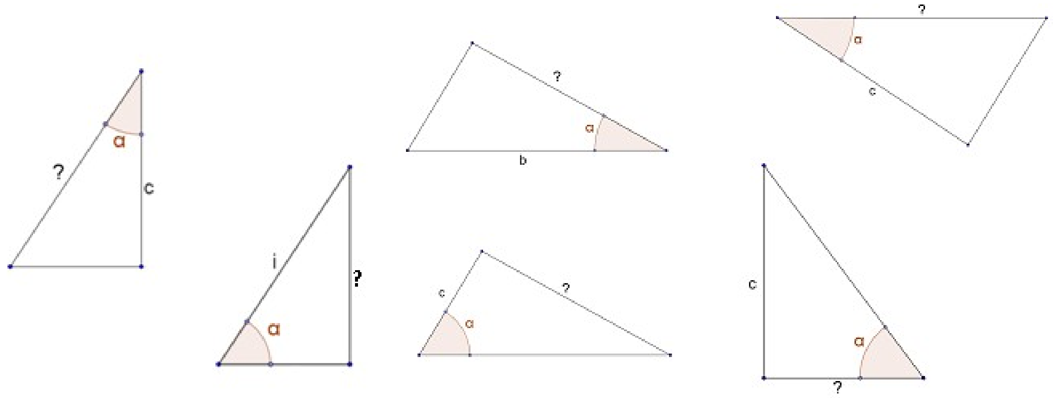
Si ottiene $sen(\beta)=\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$; $\cos(\beta)=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$; $\tan(\beta)=\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$.

Per l'angolo complementare lasciamo al lettore il completamento

$sen(\gamma)=\ldots\ldots$; $\cos(\gamma)=\ldots\ldots$; $\tan(\gamma)=\ldots\ldots$

Osserviamo che ancora non possiamo avere informazioni sull'ampiezza degli angoli acuti; vedremo in seguito come procedere nei calcoli e quindi concludere la risoluzione del triangolo.

16 Completate la figura mettendo le opportune lettere ai vertici dei triangoli rettangoli assegnati e, applicando le definizioni, scrivete la formula che permette di ricavare l'elemento incognito indicato con un punto interrogativo a partire dagli elementi noti indicati con una lettera.



►2. Due identità fondamentali

1. $\tan(\gamma) = \frac{a\cdot\sin(\gamma)}{a\cdot\cos(\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}$ la tangente di un angolo è il rapporto tra il seno dell'angolo e il coseno dello stesso angolo. In generale $\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$
2. dal teorema di Pitagora si ha $a^2=b^2+c^2$ da cui dividendo ambo i membri per a^2 si ottiene $\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2} \rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 = (\cos(\gamma))^2+(\cos(\gamma))^2=\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma)$
   In generale, per qualunque angolo vale $\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1}$

Si definiscono inoltre altre funzioni goniometriche che potranno servire nella risoluzione dei triangoli:

$cosec(x)=\frac{1}{sen(x)}$; $sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$; $cotan(x)=\frac{1}{\tan(x)}$.

<u>Esempio</u>

In un triangolo rettangolo si sa che $\cos(\beta)=\frac{3}{4}$ *, determinare sen(β) e tan(β).*

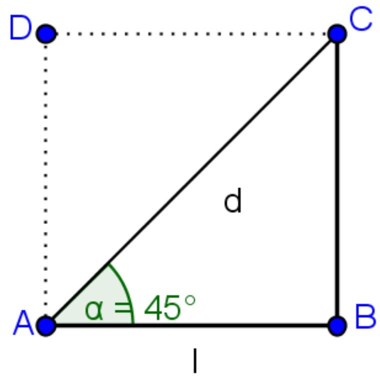
Strategia risolutiva:

ricordando che per qualunque angolo si ha $\cos^2(x)+sen^2(x)=1$ possiamo sostituire il dato e calcolare $sen(\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\beta)}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Infine sapendo che per ogni angolo vale $\tan(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$ ricaviamo $\tan(\beta)=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$. Osserviamo che nella determinazione di sen(β) abbiamo trascurato il valore negativo in quanto abbiamo definito le funzioni goniometriche come rapporto delle misure di due segmenti.

17 Nel triangolo rettangolo ABC sappiamo che $sen(\gamma)=\frac{5}{7}$. Determinare le altre funzioni goniometriche dell'angolo γ e quelle del suo complementare.

►3. Angoli particolari

Possiamo ricavare per via geometrica il valore esatto delle funzioni goniometriche di angoli particolari.



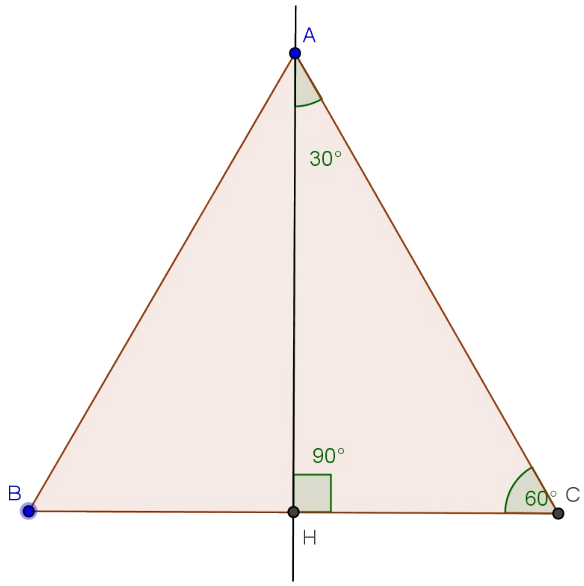
Angoli di 45°

Il triangolo rettangolo isoscele i cui angoli acuti sono di 45° è la metà di un quadrato di lato l.

Sappiamo che $d=\sqrt{1^2+1^2}=1\cdot\sqrt{2}$; poiché il calcolo delle funzioni goniometriche per un angolo non dipende dal particolare triangolo usato, possiamo concludere per le definizioni date:

$\sin(45°)=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e anche $\cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e per la definizione di tangente dell'angolo $\tan(45°)=1$.

Angoli di 30° e 60°



Il triangolo rettangolo con un angolo di 30° ha l'altro angolo acuto di 60° pertanto possiamo trattare insieme la ricerca delle funzioni goniometriche di tali angoli.

Il triangolo rettangolo in questione è la metà di un triangolo equilatero di lato 1 e altezza h; poiché HC è metà del lato possiamo subito dire che

$$\cos(60°)=\frac{\overline{HC}}{1}=\frac{1}{2}$$

Per le definizioni date si ha $\sin(60°)=\frac{\overline{AH}}{1}$.

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$\overline{AH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ e dunque

$$\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Infine $\tan(60°)=\frac{\sin(60°)}{\cos(60°)}=\sqrt{3}$.

Ricordando che per angoli complementari è $\sin(x)=\cos(90°-x)$; $\cos(x)=\sin(90°-x)$, essendo $30°=90°-60°$ possiamo scrivere: $\sin(30°)=\cos(60°)=\frac{1}{2}$; $\cos(30°)=\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e infine $\tan(30°)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Angoli di 0° e 90°

Ovviamente non esiste un triangolo con un angolo di 0°: si tratta di un triangolo che degenera in un segmento. Possiamo pensare ad un triangolo rettangolo avente a=1 e immaginare di muovere il vertice C in modo da rimpicciolire sempre più l'angolo β; quando β diventa 0° il segmento b si riduce ad un punto e si ha b = 0 e quindi sen(0°) = 0, l'ipotenusa a coincide con il cateto c quindi cos(0°) = 1 e infine tan(0°) = 0.

Allo stesso modo se deformiamo il triangolo fino ad avere l'angolo γ di 0° e pertanto β di 90° otteniamo che sen(90°) = 1 e cos(90°) = 0; applicando la formula della tangente si avrà una frazione con denominatore nullo e quindi diremo che tan(90°) non è definita.

Possiamo riassumere i valori trovati per questi angoli particolari in una tabella:

angolo x	sen(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Non definita

Come possiamo ottenere i valori delle funzioni goniometriche per angoli diversi da quelli sopra considerati?

►4. Usare la calcolatrice

Sul mercato ci sono vari tipi di calcolatrice scientifica, ciascuno dovrà familiarizzare con la propria calcolatrice per imparare ad impostare correttamente il calcolo da effettuare e i tasti da pigiare per ottenere il corretto risultato. Se non si digita in modo consapevole e se non si sanno leggere i risultati, la calcolatrice è uno strumento inutilizzabile e talvolta può anche essere dannoso.

Nel seguito faremo riferimento alla calcolatrice Kcalc, in dotazione al Desktop environment KDE (Linux/Unix), cercando di dare riferimenti che si adattino a tutte le calcolatrici.

I passo: scelta dell'unità di misura

Sicuramente conosci già come unità di misura degli angoli il grado sessagesimale. Esistono però altre unità di misura utilizzate in contesti diversi: i gradi centesimali sono utilizzati principalmente in topografia, i radianti utilizzati in matematica specialmente in analisi.

Su tutte le calcolatrici è possibile effettuare le operazioni sugli angoli scegliendo l'unità di misura:

angolo	sigla	sigla abbreviata
gradi sessagesimali	DEG	D
gradi centesimali	GRA	G
radianti	RAD	R

Impostiamo la calcolatrice in modo da ricevere in ingresso angoli misurati in gradi sessagesimali: sul display della calcolatrice deve comparire D o DEG.

ok

II° passo: calcolo del coseno di un angolo

Ci proponiamo di determinare cos(60°)

Controllate di aver impostato l'input dell'angolo in gradi sessagesimali,

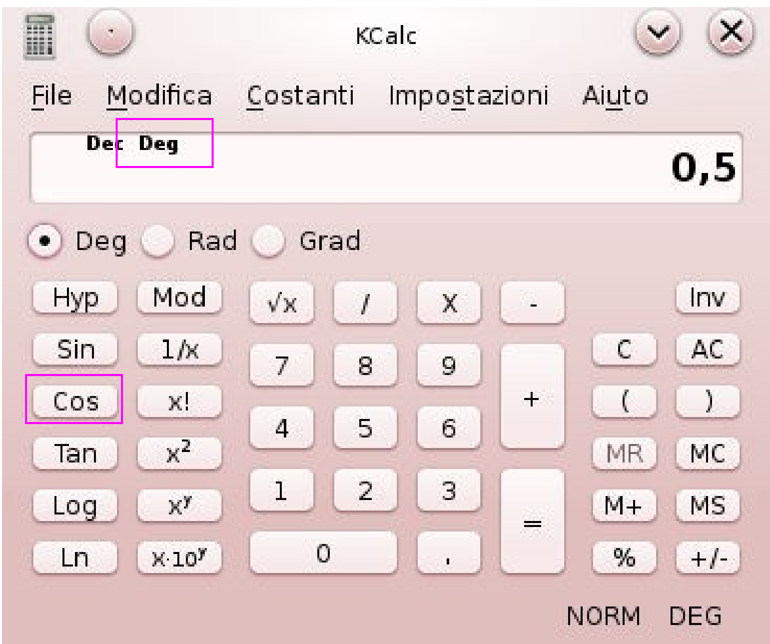
- digitate 60,
- premete il tasto **cos.**

La calcolatrice restituisce 0.5

Dunque cos(60°)=0.5

Attenzione: nella scrittura dei numeri decimali useremo il "punto decimale" in sostituzione della virgola.

Obiettivo dell'esercizio seguente è farvi prendere un po' di confidenza con la vostra calcolatrice; i valori della



funzione coseno vengono restituiti (output) dalla calcolatrice con 8 o 10 decimali, approssimate alla quarta cifra decimale.

18 Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere.

Angolo α	0°		30°		45°		60°		90°
Cos(α)									

Osservazioni:

- la funzione coseno calcolata su angoli compresi fra 0° e 90° restituisce sempre numeri compresi fra 0 e 1.
- il coseno vale 1 (il massimo) quando l'angolo di input è 0° e decresce fino a 0 man mano che l'angolo immesso cresce fino a 90°. Detto in altre parole: il coseno di un angolo che cresce da 0° a 90° diminuisce dal valore 1 al valore 0.
- la decrescita del coseno non è proporzionale all'aumento dell'angolo, tant'è vero che si ha: cos (30°) =0,867 ma cos(30°) =0,5 che evidentemente non è la metà di cos(30°).

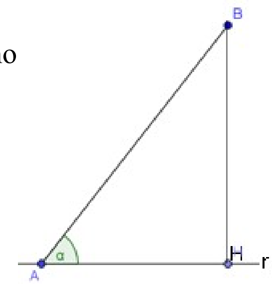
19 Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere.

Angolo α	0°		30°		45°		60°		90°
sen(α)									
tan(α)									

Quali osservazioni si possono fare per la funzione sen(α)?

<u>Problema</u>

Il segmento AB misura 5m e la sua proiezione AH sulla retta r misura 3m. Possiamo determinare la misura dell'angolo α compreso tra r e il segmento AB?

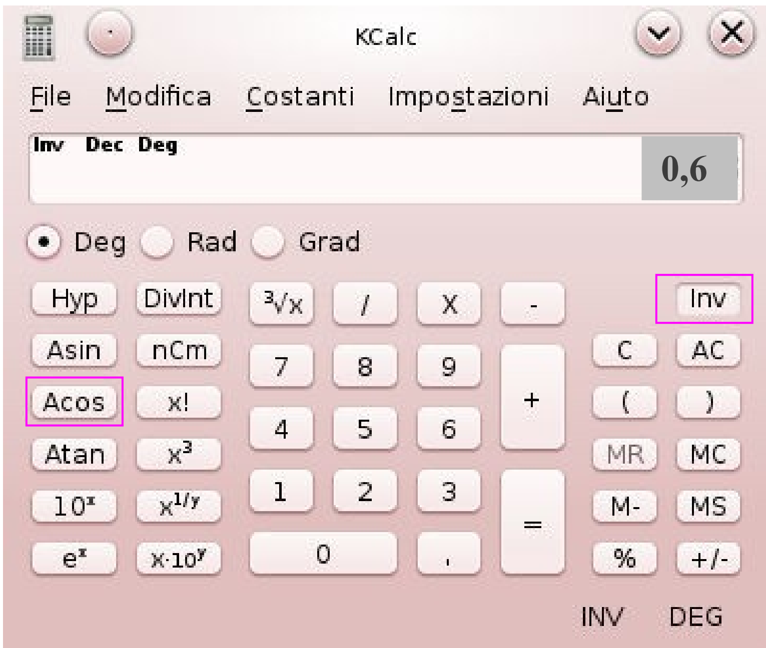


Dati: $\overline{AB}=5$, $\overline{AH}=3$ Obiettivo: ? α

Strategia risolutiva:

Partiamo dalla formula $\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\cos(\alpha)$, da essa possiamo ottenere $\cos(\alpha)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$. Sostituendo i valori noti otteniamo $\cos(\alpha)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}=0{,}6$

Per risalire dal valore del coseno al valore dell'angolo usiamo la calcolatrice attivando la funzione inversa di coseno; su molte calcolatrici tale funzione è indicata con $\cos^{-1}$, funzione che si attiva con il tasto "INV" o "2ND" (second function); nella calcolatrice di esempio pigiando il tasto inv compare il tasto della funzione inversa "ACOS".



Calcoliamo la misura dell'angolo il cui coseno è 0,6 immettendo tale valore e attivando i tasti "INV" e "ACOS". La calcolatrice restituisce α= 53.13010235.

Questo risultato ci dice che l'angolo è di 53° più una parte decimale 0.13010235.

Ricordiamo che i sottomultipli del grado vengono espressi in sessantesimi (1 grado=60 primi), a loro volta suddivisi in sessantesimi (1 primo=60 secondi).

Dunque la parte decimale estratta dalla calcolatrice va adeguatamente modificata:

Al risultato della calcolatrice tolgo la parte intera (53) e moltiplico per 60; in questo caso ottengo 7.8061... la cui parte intera rappresenta i primi; tolgo ancora la parte intera (7) e moltiplico per 60 ottenendo i secondi 48.368... Arrotondiamo la parte intera e possiamo concludere α ≈ 53°7'48". Alcune calcolatrici scientifiche fanno in automatico questi calcoli attivando un opportuno tasto.

Osserviamo che viene utilizzato il simbolo ≈ (uguale circa) per indicare che abbiamo usato valori approssimati.

20 Nel primo esempio avevamo trovato per le funzioni goniometriche degli angoli acuti del triangolo rettangolo di lati 5m, 4m, 3m, i seguenti valori:

$$sen(\beta)=\frac{b}{a}=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\beta)=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \quad , \quad \tan(\beta)=\frac{b}{c}=\frac{3}{4} \quad .$$

Ora sei in grado di determinare l'ampiezza degli angoli acuti attivando le funzioni inverse sulla tua calcolatrice.

►5. Operazioni con i gradi sessagesimali

Accenniamo alle addizioni e sottrazioni tra angoli.

Svolgiamo l'operazione 48° 45' 52" + 62° 27' 22".

Sommando termine a termine otteniamo 110° 72' 74". tenendo conto che 1 grado = 60 primi e 1 primo = 60 secondi, si ha che i 74” valgono 1' e 14”, i 72' 74” diventano allora 73' e 14”. Trasformiamo poi i 73' in 1° e 13'. In definitiva si ha che 110° 72' 74" = 111° 13' 14".

$$\begin{array}{r} 48°\ 45'\ 52'' \ + \\ 62°\ 27'\ 22'' \\ \hline 110°\ 72'\ 74'' \\ 111°\ 13'\ 14'' \end{array}$$

Svolgiamo ora una sottrazione: 90° - 45° 33' 12", che tra l'altro è una comunissima operazione, poiché capita abbastanza spesso di dover calcolare l'angolo complementare.

Per svolgere la sottrazione conviene scrivere 90° come 89° 59' 60" e svolgere la sottrazione avendo come risultato 44° 26' 48".

$$\begin{array}{l} 90° \\ 45°\ 33'\ 12'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 89°\ 59'\ 60'' \\ 45°\ 33'\ 12'' \\ \hline 44°\ 26'\ 48'' \end{array}$$

Un'ultima sottrazione: 72° 20' 40" – 23° 40' 52".

Per fare questa sottrazione parto dai secondi e non potendo fare 40 – 52, utilizzo il riporto trasformando in: 72° 20' 40” in 72° 19' 100". Ora posso eseguire agevolmente la sottrazione e ottengo 48".

sottraggo poi i primi tra loro, aggiungendo il riporto ai 19'; ottengo 39'.

sottraggo poi i gradi: 71° - 23°.

Il risultato finale è 48° 39' 48".

Esegui le seguenti operazioni con gli angoli

21 Calcola il complementare di 25° 30' 58".

22 Calcola il supplementare di 118° 59' 59".

23 Calcola il doppio di 45° 45' 45".

24 Calcola la metà di 128° 57' 30".

25 16° 29' 32" + 95° 57' 31".

26 127° 50' 32" – 27° 51' 42"

►6. Risoluzione di triangoli rettangoli

Ricordiamo che risolvere un triangolo significa ricavare le misure di tutti i suoi elementi (lati e angoli) date le misure di alcuni dei suoi elementi.

Esempi

■ *Determinate l'area del triangolo rettangolo sapendo che* $\overline{BC}=2\,(m)$ e $\beta=20°$.

Dati: $B\hat{A}C=90°$, $\overline{BC}=2\,(m)$, $\beta=20°$ Obiettivo: ?Area(ABC)

- Strategia risolutiva: $Area(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

  Dobbiamo dunque determinare le misure dei cateti. Applicando le definizioni

  $\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\cos(\beta)=2\cdot\cos(20°)\simeq 2\cdot 0{,}9397\simeq 1{,}8794$

  $\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\cos(\gamma)=2\cdot\cos(70°)\simeq 2\cdot 0{,}3420\simeq 0{,}6840$

  pertanto $Area\simeq 0.6428\,m^2$.

■ *Un triangolo rettangolo ha il cateto AB di 5cm. e l'angolo acuto □ di 57°; determinate l'altro angolo acuto, la misura del cateto AC e la misura dell'ipotenusa.*

Dati: $B\hat{A}C=90°$, $B\hat{C}A=57°$, $\overline{AB}=5$ Obiettivo: ? $\hat{\beta}$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$

Strategia risolutiva:

Essendo gli angoli acuti complementari si ottiene $\hat{\beta}=90°-57°=33°$

Per la formula inversa $\overline{CB}=\frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}=\frac{5}{\cos(33°)}\simeq\frac{5}{0{,}8386}\simeq 5{,}9618\,(cm)$

Infine determiniamo l'altro cateto e osserviamo che possiamo procedere in due modi:

1°: applichiamo il Teorema di Pitagora $\overline{CA}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{AB}^2}\simeq\sqrt{35{,}5432-25}\simeq\sqrt{10{,}5432}\simeq 3{,}2470\,(cm)$

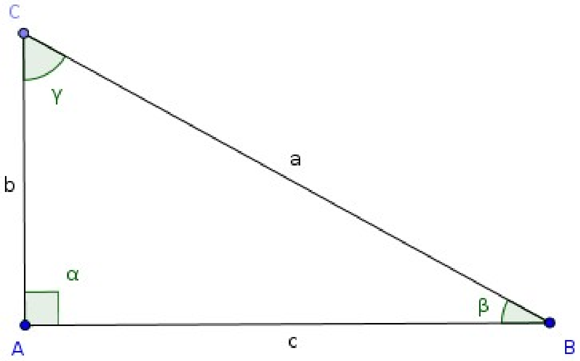
2°: per definizione $\overline{CA}=\overline{CB}\cdot\cos(\gamma)\simeq 5{,}9618\cdot\cos(57°)\simeq 5{,}9618\cdot 0{,}5446\simeq 3{,}2468\,(cm)$

Osservazioni:

■ Nei calcoli effettuati abbiamo operato un'approssimazione; per esempio il valore esatto di $\overline{CB}$ è rappresentato solo dall'espressione $\overline{CB}=\frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}=\frac{5}{\cos(33°)}$.

■ I risultati ottenuti con procedimenti diversi possono differire, se pur di poco, a causa dell'uso di valori approssimati nei calcoli che aumentano l'errore di approssimazione (propagazione dell'errore).

■ *Risolvi il triangolo rettangolo della figura sapendo che* $c=20\,(cm)$ *e* $\sin(\beta)=\frac{3}{5}$.



Usiamo l'identità fondamentale per determinare cos(β):

$$\cos(\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=$$

$$=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos(\beta)=\frac{c}{a}\ \rightarrow\ a=\frac{c}{\cos(\beta)}=\frac{20}{\frac{4}{5}}=\frac{20\cdot 5}{4}=25\,(cm)$$

per il teorema di Pitagora $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15\text{cm}$

β ≅ 36°52'12" (calcolato con la calcolatrice e arrotondato), γ ≅ 90° - β = 53°07'48".

- *Risolvere il triangolo rettangolo ABC retto in A (quello della figura) sapendo che b=2cm e* $\sin(\beta)=0{,}2$.

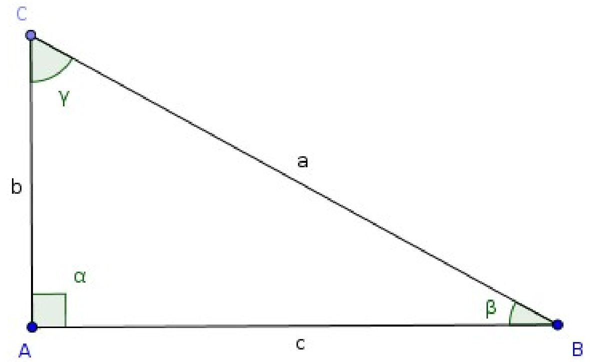
Dati: $b=2\text{cm}$, $\sin(\beta)=0{,}2$ Obiettivo; ? a, c, β, γ

Strategia risolutiva:

Dalle definizioni si ha $\sin(\beta) = \frac{b}{a} \rightarrow 0{,}2 = \frac{2}{a}$ da cui possiamo ricavare $a = \frac{2}{0{,}2} = 10\text{cm}$. Con il teorema di Pitagora possiamo ricavare l'altro cateto $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{100-4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \simeq 9{,}7980$.
Infine con la funzione inversa ricaviamo l'angolo β: $\sin^{-1}(0{,}2)=11{,}5369\ldots$ e procedendo come spiegato in precedenza otteniamo: β= 11°32′13″ e in seguito γ= 90°-β= 78°27′47″.

27 Risolvere il triangolo rettangolo a partire dai dati a disposizione, facendo sempre riferimento alla solita figura:

a) $a=30(cm), \beta=25°30'$
b) $a=1{,}25(m), \gamma=75°$
c) $a=15(cm), \beta=30°$
d) $a=36(cm), \sin(\beta)=\frac{2}{3}$
e) $c=12(m), \cos(\beta)=\frac{1}{4}$
f) $c=12(m), \tan(\beta)=2$
g) $b=40(cm), \tan(\beta)=1$
h) $c=12(cm), a=20(cm)$
i) $b=30(cm), c=40(cm)$



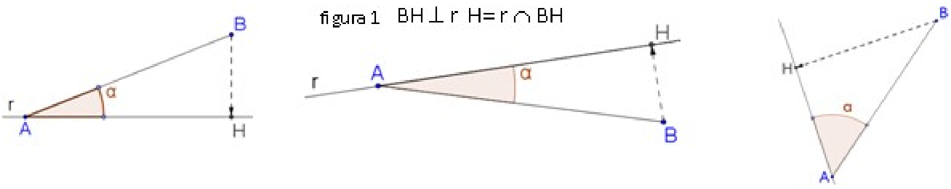
28 Nel triangolo rettangolo ABC, retto in A, determina l'altezza relativa all'ipotenusa sapendo che il cateto AB = 20 cm e l'angolo β = 25°.

29 Sapendo che $\cos(\gamma)=\frac{5}{12}$ e che il cateto b misura 20 cm, calcola area e perimetro del triangolo rettangolo.

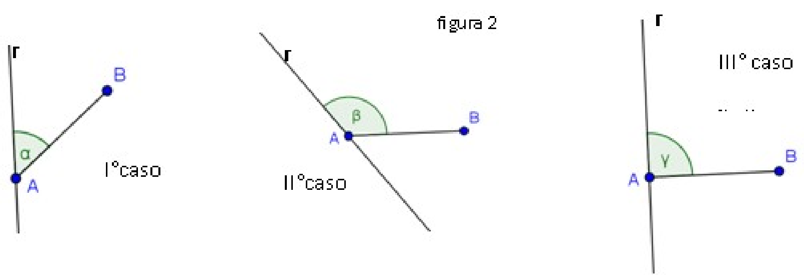
30 Determinare perimetro e area del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura cm0.5 e l'angolo α è di 30°.

Proiezione di un segmento lungo una direzione

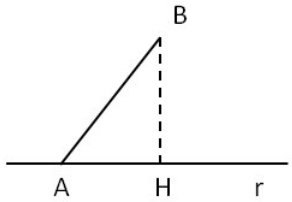
E' dato un segmento AB ed una retta r che passa per un suo estremo (A, per fissare le idee). La **proiezione del segmento AB sulla retta r** è il segmento AH dove H è l'intersezione fra r e la perpendicolare alla retta r passante per B (si vedano i tre esempi in figura)



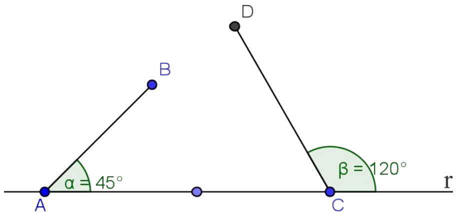
31 Costruite la proiezione del segmento AB sulla retta r in ciascuna delle figure seguenti e descrivete i passi effettuati:



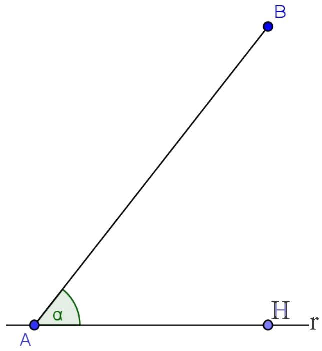
32 Il segmento AB misura 2m. Determinare la misura della sua proiezione AH sulla retta r sapendo che l'angolo tra retta e segmento è di 72°. Determinare infine perimetro e area del triangolo AHB.



33 Della figura accanto sappiamo che: $\overline{AB}=2\text{m}$, $\overline{DC}=2{,}52\ m$, $\overline{AC}=3{,}76\ m$. Indicate con H e K rispettivamente le proiezioni di B e D sulla retta r, determinate l'area del poligono ACDB.



34 La proiezione AH è di 2 metri; determinate la misura del segmento "proiettante" AB nei seguenti casi: α=28°; α=45°; α=60°; α=88° (con l'approssimazione alla quarta cifra decimale).



35 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 , calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto α in gradi e decimali di grado.

36 In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola cosx, tgx e x sapendo che senx = 0,2.

37 In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola senx, cosx e x sapendo che tgx = 1,5.

38 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 , calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto α in gradi e decimali di grado.

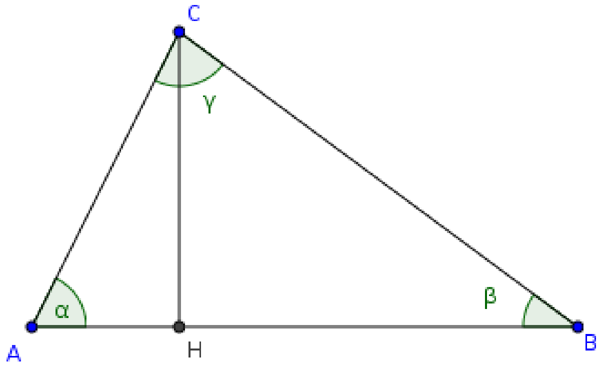
39 Trova area e perimetro del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che AB= 50 cm. .

40 Risolvi il triangolo rettangolo che ha un cateto di 25 cm e il seno dell'angolo ad esso adiacente pari a 0,28.

41 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, la misura dei restanti lati sapendo che il cateto opposto ad α misura 66 cm.

►7. Triangolo qualsiasi

Per risolvere i triangoli qualsiasi, tramite l'altezza, bisogna ricercare nella figura triangoli rettangoli.
I dati relativi ai prossimi esercizi fanno riferimento al disegno a lato. Nel seguito saranno indicati altri teoremi che permettono di risolvere tutti i tipi di triangoli.



Esempio

Risolvi il triangolo acutangolo della figura con $\beta=57°,\ \alpha=39°,\ \overline{CH}=11(m)$.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo γ :

$\gamma=180°-\alpha-\beta=180°-39°-57°=84°$

Individuiamo ora i triangoli rettangoli nella figura in modo da poter applicare le formule.

Con il triangolo rettangolo CHB

$\sin(\beta)=\frac{CH}{CB}$; dunque $CB=\frac{CH}{\sin(\beta)}=\frac{11}{\sin(57°)}\simeq 13{,}2(m)$

$\tan(\beta)=\frac{CH}{BH}$; dunque $BH=\frac{CH}{\tan(\beta)}=\frac{11}{tg(57°)}\simeq 7{,}15(m)$

Con il triangolo rettangolo AHC

$\sin(\alpha)=\frac{CH}{AC}$; dunque $AC=\frac{CH}{\sin(\alpha)}=\frac{11}{sen(39°)}\simeq 17{,}46(m)$

$\tan(\alpha)=\frac{CH}{AH}$; dunque $AH=\frac{CH}{\tan(\beta)}=\frac{11}{\tan(39°)}\simeq 13{,}75(m)$

Infine calcolo $AB=AH+BH=7{,}15+13{,}75=20{,}9(m)$

42 Risolvi il triangolo acutangolo ABC nei seguenti casi:

a) $CH=20(cm),\ \alpha=45°,\ \beta=62°20'$

b) $AC=20(cm),\ \alpha=60°,\ \beta=35°$

c) $BH=12(cm),\ \alpha=35°,\ \beta=40°30'$

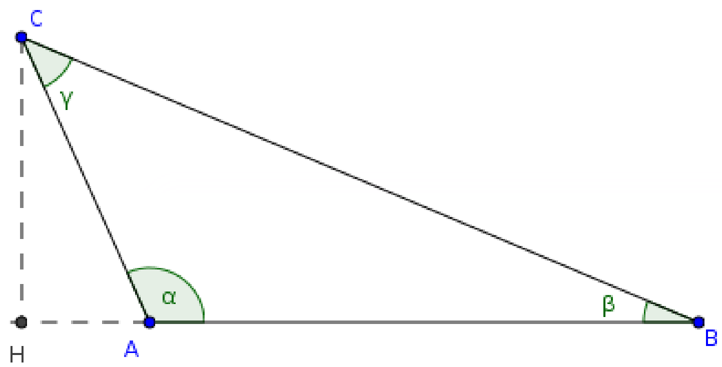
d) $AH=22{,}25(cm),\ \alpha=20°,\ \beta=65°$

e) $CH=10(cm),\ \alpha=42°,\ \beta=53°$.

43 In riferimento alla seguente figura risolvi il triangolo ABC, conoscendo gli elementi indicati:

a) $AB=2(cm),\ BC=6(cm),\ \beta=30°$

b) $CH=50(cm),\ AB=76(cm),\ \alpha=120°$



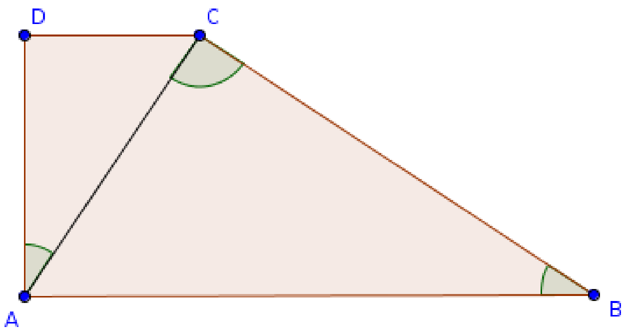
44 Risolvere un triangolo isoscele nota la $base=4\sqrt{2}(cm)$ e l' $area=32(cm^2)$.

45 Un triangolo isoscele ha l'altezza relativa alla base lunga 120 cm e il seno dell'angolo alla base è uguale a $\frac{2}{3}$.
Calcola perimetro e area del triangolo.

Quadrilateri

<u>Esempio</u>

Nel trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC forma un angolo di 35° con la base maggiore AB e la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è 10 cm.



<u>Dati</u>: $AD=10\,cm\,,\ A\hat{B}C=35°\,,\ =90°$

<u>Risoluzione:</u>

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo $C\hat{A}B=55°$

Siccome il trapezio è rettangolo

$$D\hat{A}C=D\hat{A}B-C\hat{A}B=90°-55°$$

$$\sin(A\hat{B}C)=\frac{AD}{CB}$$

$$CB=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}=\frac{10}{\sin(35°)}\simeq 17{,}43(cm)$$

$$\sin(A\hat{B}C)=\frac{AD}{CB}$$

$$AB=\frac{CB}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}\cdot\frac{1}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}=\frac{10}{\sin(35°)\cos(35°)}\simeq 21{,}28$$

$$\frac{DC}{AD}=\tan(D\hat{A}C)\ \rightarrow\ DC=AD\cdot\tan(D\hat{A}C)=10\tan(35°)\simeq 7{,}00$$

$$2p=AB+BC+DC+DA=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+AD\cdot\tan(D\hat{A}C)+\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}+AD=$$

$$=AD\cdot\left(\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+\tan(D\hat{A}C)+\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)}+1\right)=$$

$$=10\cdot\left(\frac{1}{\sin(35°)\cos(35°)}+\tan(35°)+\frac{1}{\sin(35°)}+1\right)\simeq 55{,}72(cm)$$

$$A=\frac{(AB+DC)\cdot AD}{2}=\left(\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+AD\cdot\tan(D\hat{A}C)\right)\cdot AD\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+\tan(A\hat{B}C)\right)\cdot AD^2\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sin(35°)\cos(35°)}+\tan(35°)\right)\cdot 10^2\cdot\frac{1}{2}\simeq 141{,}53(cm^2)$$

46 Nel trapezio ABCD isoscele sulla base maggiore AB, la base minore misura 30 cm, i lati obliqui 20 cm e il seno degli angoli acuti è 0,6. Trova la misura del perimetro e dell'area.

47 Trova l'area di un rombo di perimetro 120 cm e con angolo ottuso pari a 100°.

48 Trova la misura del lato e dell'altezza del rombo con diagonale maggiore di 20 cm e con uno dei due angoli acuti di 30°.

49 Trova le due altezze del parallelogramma di lati 10 cm e 15 cm e con i due angoli acuti di 20°

50 Trova l'area di un parallelogramma sapendo che i lati sono lunghi 12,5 cm e 7,8 cm e l'angolo tra essi compreso è 44°30'.

51 Calcola l'area di un rombo sapendo che il lato è 12 cm e l'angolo ottuso di 120°.

52 Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le sue diagonali misurano 10 cm e che gli angoli che esse formano con la base sono di 35°30'.

53 L'area di un trapezio isoscele è 28 cm^2 e il suo perimetro è 24. Determina gli angoli del trapezio, sapendo che la sua altezza è 4 cm.

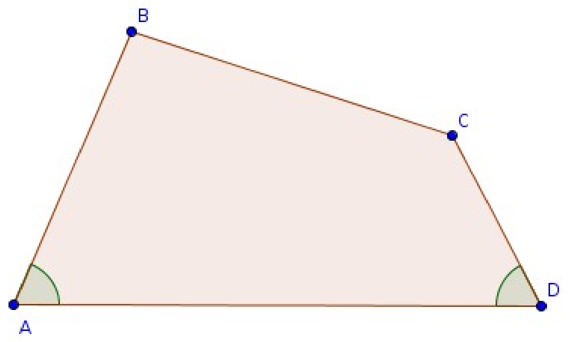
Applicazioni alla topografia

La topografia è una disciplina che studia gli strumenti ed i metodi operativi, sia di calcolo sia di disegno, che sono necessari per ottenere una rappresentazione grafica di una parte della superficie terrestre.

La topografia ha carattere applicativo e trae la sua base teorica dalla matematica, dalla geometria e dalla trigonometria.

Esempio

Risolvere il quadrilatero ABCD della figura sapendo che $AB=42{,}5\,m$, $BC=32{,}18\,m$, $CD=27{,}6\,m$, $B\hat{A}D=56°$, $A\hat{D}C=62°$



Risoluzione

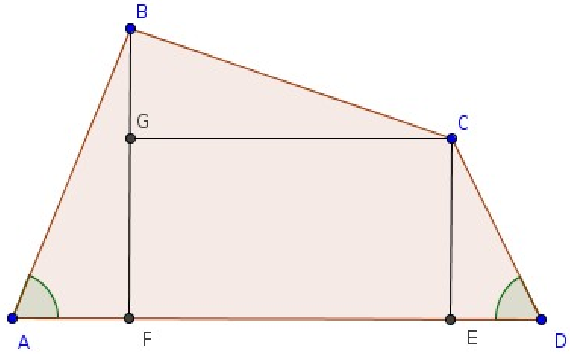
Suddividiamo il quadrilatero in tre triangoli rettangoli e in un rettangolo, come nella figura riportata sotto.

$F\hat{B}A=90°-B\hat{A}D=90°-56°=34°$

$AF=AB\cos(B\hat{A}D)=42{,}5\cos(56°)=23{,}77\,(m)$

$BF=AB\sin(B\hat{A}D)=42{,}5\sin(56°)=35{,}23\,(m)$

$D\hat{C}E=90°-A\hat{D}C=90°-62°=28°$



$DE=CD\cos(F\hat{B}A)=27{,}6\cos(62°)=12{,}96\,(m)$

$CE=CD\sin(A\hat{D}C)=27{,}6\sin(62°)=24{,}37\,(m)$

$BG=BF-GF=BF-CE=35{,}23-24{,}37=10{,}86\,(m)$

$GC=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{32{,}18^2-10{,}86^2}=30{,}29\,(m)$

$DA=AF+FE+ED=23{,}77+30{,}29+12{,}96=67{,}02\,(m)$

$\cos(C\hat{B}G)=\dfrac{GC}{CB}=\dfrac{30{,}29}{32{,}18}=0{,}92$

$\cos(C\hat{B}G)=19°43'56''$ (calcolato con la funzione cos[-1] della calcolatrice)

$B\hat{C}G=90°-C\hat{B}G=70°16'4''$

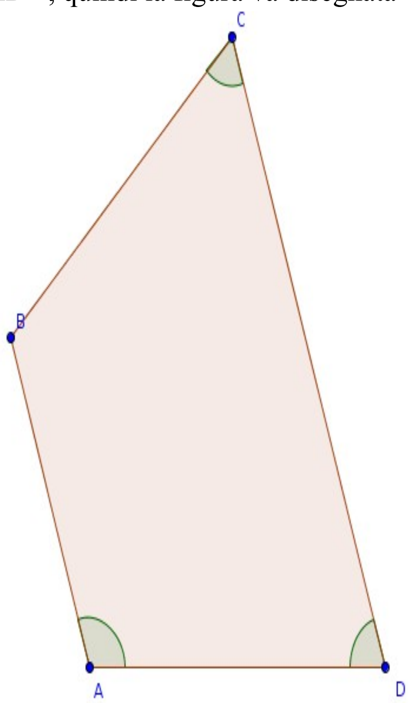
$A\hat{B}C=A\hat{B}F+F\hat{B}c=34°+19°43'56''=53°43'56''$

$B\hat{C}D=B\hat{C}G+G\hat{C}E+E\hat{C}D=70°16'4''+90°+28°=188°16'4''$

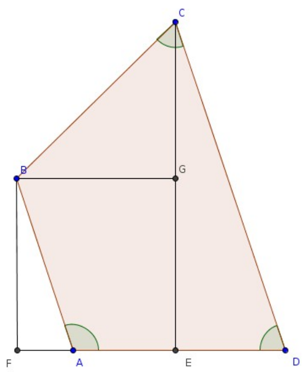
54 Risolvere il quadrilatero ABCD come quello della figura precedente sapendo che $AB=8{,}01\,m$, $BC=5{,}54\,m$, $CD=4{,}63\,m$, $B\hat{A}D=40°$, $A\hat{D}C=50°$.

55 Risolvere il quadrilatero ABCD sapendo che $AB=5{,}8\,m$, $BC=6{,}24\,m$, $CD=12{,}81\,m$, $B\hat{A}D=45°$, $A\hat{D}C=65°$ (attenzione: in questo problema $CD>AB$, quindi la figura va disegnata diversamente).

56 Risolvere il quadrilatero ABCD della figura sapendo che $AB=33{,}28\,m$, $CD=59{,}7\,m$, $C\hat{B}A=102°$, $B\hat{A}D=63°$, $A\hat{D}C=72°$.



Suggerimento: tracciare i segmenti come nella figura sotto e osservare i triangoli e il rettangolo che si forma



Applicazioni alla fisica

57 Un vettore velocità v ha modulo 12 cm/sec. Posto su un piano cartesiano Oxy, forma un angolo di 30° con l'asse delle ascisse. Trova le componenti di v, v_x e v_y sugli assi.

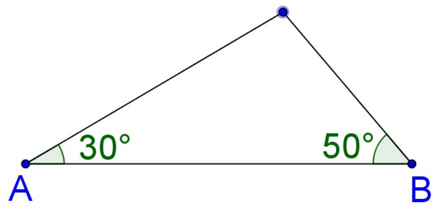
58 Un piano inclinato forma col piano d'appoggio un angolo di 16°. Determina la forza non equilibrata che farà scivolare un corpo di 12 kg lungo un piano inclinato.

59 Calcola la forza necessaria per mantenere in stato di quiete un corpo del peso di 25 kg su un piano inclinato con la pendenza di 20° 15'.

60 Calcola la lunghezza del vettore v(3,4) e gli angoli che esso forma con gli assi cartesiani. calcola inoltre l'equazione della retta che ha la stessa direzione del vettore v e passa per il punto A(0,1).

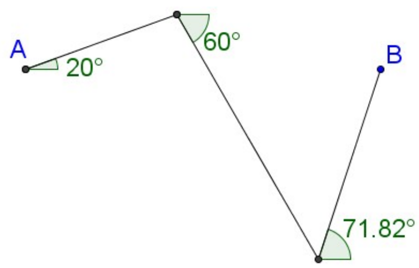
61 Un aereo viaggia da A a B, A e B distano 1000 km, in assenza di vento l'aereo impiega un'ora per effettuare il percorso. Quel giorno però sulla tratta AB soffia un vento costante di intensità 100 km/ora e direzione di 240 gradi rispetto alla direzione AB. Calcola il tempo impiegato e l'angolo di rotta necessario per mantenere la direzione AB.

62 Parto da una località A ai piedi di una collina per raggiungere una località B che si trova nell'altro versante della collina, alla stessa quota di A. Per fare questo percorro per 467 m una dritta mulattiera che sale con pendenza costante di 30°. Poi percorro in discesa 300 m lungo un dritto sentiero scalinato con pendenza costante di 50° e giungo alla località B. Quanto sarebbe lungo un tunnel che congiungesse A con B?



(R: 597,27m nell'ipotesi che i percorsi giacciano sullo stesso piano verticale che passa per A e B)

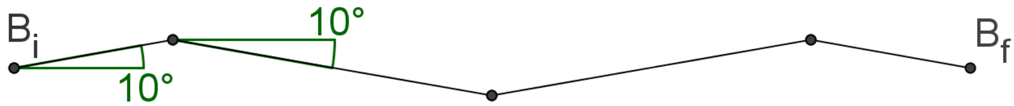
63 Per andare da una località A ad una località B poste in una pianura mi muovo, in aereo e sempre alla stessa quota, di 20 Km nella direzione che forma un angolo di 20° rispetto alla direzione AB. Poi, per riavvicinarmi alla congiungente AB, mi muovo di 35 Km lungo la direzione che forma un angolo di 60° rispetto ad AB. Infine percorro 24,7 Km nella direzione che forma un angolo di 71,82° (ovvero 71°49'12") rispetto ad AB giungendo finalmente sopra a B. Quanto dista A da B?



N.B. Sulla calcolatrice si può digitare sia *cos*(71,82°) che *cos*(71°49°12°) purché la calcolatrice sia impostata con i gradi (**D** o **Deg** sul display; **G** o **Grad** indica un'altra unità di misura!)

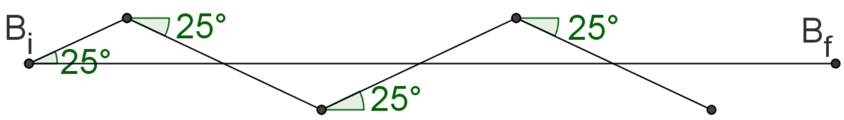
(R. 44 Km.)

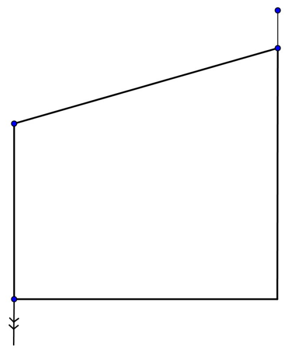
64 Sono in barca a vela e parto dalla boa B_i per raggiungere la boa B_f. Inizio la navigazione percorrendo un tratto lungo 1 km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto al tratto B_iB_f. Poi viro per riavvicinarmi a B_iB_f e percorro un tratto di 2 Km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto a B_iB_f. Ripeto la virata di 10° per riavvicinarmi alla congiungente B_iB_f e percorro di nuovo 2 km. Faccio un'ultima virata di 10° che, percorrendo 1Km, mi porta esattamente a B_f. Quanto dista B_i da B_f? (R. 5,91 Km)



65 Faccio una dritta salita che separa due località distanti in linea d'aria 5 Km. Se la pendenza della salita è di 8° costanti, qual è (in metri) la differenza di quota delle due località? (Risp. 695,87 m)

66 In barca a vela mi muovo dalla boa B_i alla boa B_f facendo un percorso a zig zag in cui ciascun tratto forma angoli di 25° rispetto al segmento B_iB_f. Dopo aver navigato per quattro tratti, di cui il primo lungo 4 Km e i restanti 8 Km, quanto percorso è stato fatto nella direzione B_iB_f? (R. 25,38 Km)





67 Devo stendere un cavo dell'impianto parafulmine lungo il tetto e la parete di una casa facendolo poi affondare nel terreno per 10 m. Quale deve essere la lunghezza minima del cavo sapendo che (vedi fig.) il parafulmine è posto sul punto più alto del tetto e la casa è composta da un pian terreno ed un primo piano completi di altezza standard (cioè 3 m ciascuno), è larga 9 m, ha un tetto ad una falda inclinato di 16°? (La figura rappresenta la sezione della casa). (R. 9,36 + 6 + 10 = 25,36 m).

68 Percorro una salita rettilinea con pendenza di 10° partendo da una località A posta a 400 m d'altezza e arrivando ad una località B posta a quota 700 m. Quanto dista A da B? (Risp. 2.303,50 m)

69 Dalla cima di un palco alto 1,30m un tizio alto 1,70m osserva la punta di un obelisco sotto un angolo di 40°. Con un laser misura la distanza tra il suo occhio e la cima dell'obelisco e trova 74m. Quanto è alto l'obelisco? (R. $74 \cdot \cos(40°) + 3\text{m} \approx 59{,}68\text{m}$)

N.B. Osservare un oggetto *sotto un angolo* α significa che la retta congiungente il nostro occhio con l'oggetto osservato forma un angolo α con una retta orizzontale.

70 Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda? (Ricorrere solo alla trigonometria; usare sia la formula diretta della proiezione sia la formula inversa.) [R. 8,39 m]

Problemi sulle forze

71 Per trainare un vagone fermo su un binario uso un locomotore posto in un binario parallelo ed un cavo in acciaio che, in trazione, forma un angolo di 22° rispetto ai binari. Sapendo che l'intensità della forza di trazione lungo il cavo è di 35.000 N, qual è il modulo della forza che fa muovere il vagone?
(R. 32.451 N = $3{,}2451 \cdot 10^4$ N)

72 Per estrarre un manicotto (cioè un cilindro cavo) incastrato in un paletto esercito una forza di 150 N tramite un filo che, teso durante la trazione, forma un angolo di 20° rispetto all'asse del paletto. Di che intensità è la forza che mi sarebbe bastato applicare per estrarre il manicotto se l'avessi esercitata lungo l'asse del paletto? (R. 140,95 N = $1{,}4095 \cdot 10^2$ N)

73 Per trainare un vagone lungo un binario devo esercitare una forza minima di 20.000 N lungo la direzione del binario. Qual è l'intensità minima della forza che devo esercitare sul vagone perché si sposti sapendo che la direzione della forza che posso applicare forma un angolo di 40° con la direzione del binario?
(R. 26.108,15 N = $2{,}610815 \cdot 10^4$ N)

74 Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda? (Risp. 8,39 m)

75 Come si può misurare l'altezza di un edificio, senza salirvi in cima, disponendo di un metro a nastro e di un teodolite in grado di misurare a vista angoli sul piano verticale?

76 Dal tetto di una casa alta 9m un bimbo alto 1m osserva sotto un angolo di 6° la punta di un obelisco che, in base ad una mappa, dista 232 m dalla casa. Quanto è alto l'obelisco? (R. 34,38 m)

77 Nella capriata di una cattedrale la cui sezione è un triangolo isoscele, la lunghezza della catena (cioè della base del triangolo isoscele) è di 50m e il tetto è inclinato di 15° rispetto al pavimento. Quanto è alta la capriata? (R. 6,70 m)

78 La grande piramide di Cheope ha una base quadrata larga circa 230 m. Sapendo che le pareti sono inclinate di circa 52°, quanto è alta la piramide? (N.B. l'inclinazione cui si fa riferimento è quella delle apoteme delle facce laterali rispetto al terreno) (R. 147 m.)

79 Si attribuisce all'architetto dell'Antico Egitto *Imhotep* l'intuizione che l'inclinazione delle pareti di una piramide non deve superare i 53° per evitare problemi di slittamento dei blocchi del rivestimento sotto l'effetto di un sisma. Ammesso di usare l'inclinazione massima, quanto deve essere larga una piramide che debba raggiungere l'altezza di 70 m? E se, per sicurezza, si volesse usare un'inclinazione di 45°? (*Questo problema si può risolvere usando l'angolo complementare a quello assegnato.*) [R. 105,50 m e 140 m]

80 Una mansarda avente per sezione un triangolo isoscele è alta 4m e larga 15m. Qual è l'inclinazione del tetto? (R. circa 28°)

81 La piramide di Meidum, così come modificata sotto Snefru, era alta 91,7m e larga 144m. Quanto erano inclinate rispetto al terreno le (apoteme delle) sue facce? (R. 51,86°)

82 Dall'Avenue des Champs-Élysées osservo la sommità dell'Arco di Trionfo napoleonico sotto un angolo di 36°. Sapendo che l'Arco è alto 50m quanto disto dalla sua base? Se mi trovo a 1,2Km dalla sua base, sotto che angolo ne osservo la sommità? (R. 68,82m e 2,39°)

83 Devo stendere un tirante che si aggancia a terra e ad un palo, ai 3/5 della sua altezza. Sapendo che il palo è alto 3,34m e che il cavo si aggancia al terreno a 3m dalla sua base, che angolo forma il tirante rispetto al terreno? (R. 33,74°)

84 Su un cartello stradale vediamo l'indicazione di una salita del 10%. Sapendo che questo significa che ogni 100m in orizzontale se ne percorrono 10 in verticale, calcola l'inclinazione in gradi della strada. E' possibile superare salite del 100%? (R. 5,71°; …)

85 Una capriata ha una catena di 32m ed è alta 8,9m. Qual è l'inclinazione dei suoi puntoni? *La capriata è la struttura per le coperture a "capanna"; le travi che la costituiscono formano un triangolo isoscele; la catena ne è la trave di base e i puntoni ne sono le travi oblique.* [R. 29,08°]

86 La facciata di un tempio greco ha un basamento largo 22m e alto 3m, colonne alte 7,40m e il frontone, largo quanto il basamento, ha falde inclinate di 15°. Quanto è alto il punto più elevato del tempio? Volendo fargli raggiungere l'altezza di 14m quale inclinazione bisognerebbe dare ai lati obliqui del frontone? (R. $h_{max} \approx 13,35$m; inclinazione ≈ 18,12°)

87 Dall'alto di una rampa lunga 300m misuro la distanza dalla sommità di una torre che si eleva dalla base della rampa e arriva alla stessa altezza della mia testa. Sapendo che la suddetta distanza vale 271m, qual è l'inclinazione della rampa? (R. 25,4°)

►8. Risoluzione di un triangolo qualunque

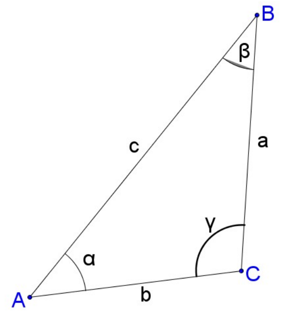
Le funzioni trigonometriche possono essere calcolate anche su angoli maggiori di 90°. Poiché, al momento, siamo interessati alle applicazioni sui triangoli, ci basterà estendere le nostre considerazioni agli angoli compresi fra 90° e 180°, essendo 180° la misura limite superiore di un angolo interno di un triangolo.

88 Completate la tabella con i valori approssimati alla quarta cifra decimale delle funzioni seno e coseno per alcuni angoli da 0° a 180°:

angolo	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
sen(α)	0		0.5				1	0.9659			0.5	0.2588	0
cos(α)	1	0.9659			0.5		0		-0.5				-1

Dalla tabella si nota che la funzione seno si mantiene positiva nell'intervallo (0°; 180°), nei cui estremi si annulla. Inoltre essa assume il valore massimo, uguale a 1, quando l'angolo è di 90°.
La funzione coseno, invece, è negativa per angoli compresi tra 90° e 180°. Precisamente: essa decresce da 1 a 0 man mano che l'angolo su cui è calcolata cresce da 0° a 90°, dopodiché continua a decrescere, da 0 a –1, man mano che l'angolo passa da 90° a 180°, si annulla 90°.
Osserviamo anche che angoli supplementari hanno lo stesso seno e coseno opposto.
Queste considerazioni saranno chiarite con lo studio delle funzioni circolari.
Affrontiamo ora il problema di risolvere un triangolo qualsiasi.
Come sappiamo, gli elementi caratteristici di un triangolo sono le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. Sappiamo anche che per determinare univocamente un triangolo sono, *in linea di massima*, necessari solo tre di questi elementi purché uno almeno di questi sia un lato. Ciò deriva dai tre criteri di congruenza dei triangoli che andiamo a ricordare.
Il **primo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso sono congruenti.
Il **secondo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti un lato e due angoli ugualmente posti rispetto al lato sono congruenti.
Il **terzo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti i tre lati sono congruenti.
Ricordiamo che due triangoli che abbiano ordinatamente uguali tutti gli angoli non sono, in generale, congruenti, bensì sono **simili**.
Quello che ci chiediamo è se la trigonometria, finora usata solo per i triangoli rettangoli, ci possa venire in aiuto per la determinazione delle misure degli elementi incogniti di un triangolo qualunque, quando conosciamo i tre elementi che lo determinano univocamente. Ad esempio, se è assegnata la lunghezza di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, la geometria euclidea, ci aiuta a costruire il suddetto triangolo tramite riga e compasso ma non ci dice nulla delle misure degli elementi incogniti.

Disegniamo un triangolo avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto e di nominare con α, β, γ le ampiezze degli angoli di vertice rispettivamente A, B, C.



1° Caso

Come abbiamo premesso, assegnati due lati e l'angolo tra essi compreso, la geometria euclidea ci assicura l'esistenza di un solo triangolo che soddisfi i dati, ma non ci permette di determinare la misura del terzo lato, né le ampiezze degli altri angoli.

TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT. In un triangolo qualsiasi di cui siano note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, il quadrato della lunghezza del lato incognito è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze note diminuita del loro doppio prodotto per il coseno dell'angolo compreso. A seconda di quali siano i due lati noti, traducendo in linguaggio matematico quanto afferma l'enunciato si ha:
$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$; $a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)$; $b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)$

Problema

Risolvete il triangolo ABC dati a= 20cm, b=10cm, γ=36°.

Dati: a= 20cm, b=10cm, γ=36° Obiettivo: ? c, α, β

Strategia risolutiva: per il teorema di Carnot possiamo scrivere $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$, sostituendo i dati $c^2=20^2+10^2-2\cdot 20\cdot 10\cdot\cos(36°)\simeq 400+100-400\cdot 0{,}8090\simeq 176{,}4$, estraendo la radice quadrata si ottiene $c\simeq\sqrt{176{,}4}\simeq 13{,}2815\,cm$

Ora dobbiamo determinare gli altri due angoli; utilizzando ancora il teorema di Carnot nella formula $a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)$ conoscendo i tre lati ci rimane come incognita il cos(α). Sostituiamo i valori noti: $20^2=176{,}4+10^2-2\cdot 13{,}2815\cdot 10\cdot\cos(\alpha)\rightarrow 400\simeq 276{,}4-265{,}63\cdot\cos(\alpha)$ e da questa ricaviamo $\cos(\alpha)\simeq\frac{276{,}4-400}{265{,}63}\simeq -0{,}4653\rightarrow\alpha\simeq\cos^{-1}(-0{,}4653)\simeq 117°$ Il triangolo è ottusangolo i suoi lati misurano rispettivamente $a=20\text{cm}$, $b=10\text{cm}$, $c=13.2815\text{cm}$; i suoi angoli hanno ampiezza $\alpha=117°$, $\beta=36°$, $\gamma=27°$

2° Caso

Sappiamo dalla geometria euclidea che assegnati tre segmenti affinché si possa costruire il triangolo che li ha come lati deve essere verificato il teorema della disuguaglianza triangolare: "in ogni triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".

Problema

Determinate le ampiezze degli angoli di un triangolo note le misure dei suoi lati a=5m, b=12m, c=13m.

Dati: a=5m, b=12m, c=13m Obiettivo: ? α, β, γ

Strategia risolutiva: utilizziamo almeno due volte il teorema del coseno per determinare due angoli:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\rightarrow 13^2=5^2+12^2-2\cdot 5\cdot 12\cdot\cos(\gamma)\rightarrow\cos(\gamma)=\frac{25+144-169}{120}=0$$

$$a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)\rightarrow 25=169+144-312\cdot\cos(\alpha)\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{169+144-25}{312}=0{,}9230$$

dalla prima ricaviamo γ=90° e dalla seconda $\alpha\simeq\cos^{-1}(0{,}9230)\simeq 22°$ per cui $\beta\simeq 90°-22°\simeq 68°$.

3° Caso

L'ultimo teorema che esaurisce il problema della risoluzione di un triangolo qualunque è il **teorema dei seni** o **di Euler** che afferma che in un triangolo qualsiasi risulta costante il rapporto fra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo che gli è opposto. In formule: $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che a = 7.52m, β = 98°, γ = 27°

Strategia risolutiva:

Possiamo immediatamente determinare il terzo angolo α =180°-(98°+27°)=55°. Per determinare i lati b e c applichiamo il teorema di Euler: $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$;

considerando la prima uguaglianza otteniamo

$$\frac{7,52}{\sin(55°)}=\frac{b}{\sin(98°)} \rightarrow b=\frac{7,52}{\sin(55°)}\cdot\sin(98°)\simeq\frac{7,52}{0,8192}\cdot 0,9902\simeq 9,0897\,m$$

considerando l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo rapporto otteniamo

$$\frac{7,52}{\sin(55°)}=\frac{c}{\sin(27°)} \rightarrow c=\frac{7,52}{\sin(55°)}\cdot\sin(27°)\simeq 4,1674\,m$$

Riflessioni sull'uso del teorema dei seni

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che a=20cm, c=13cm e γ=36°

Dati: a= 20cm, c=13cm, γ=36° Obiettivo: ? b, α, β

Gli elementi noti non rispecchiano le condizioni sufficienti di alcuno dei criteri di congruenza, ma possiamo usare il teorema dei seni che ci assicura che in *qualunque triangolo* si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \text{e quindi} \quad \frac{20}{\sin(\alpha)}=\frac{13}{\sin(36°)} \rightarrow \sin(\alpha)=\frac{20\cdot\sin(36°)}{13}\simeq 0,9043$$

e dunque con la funzione inversa $\sin^{-1}(0,9043)$ possiamo ricavare l'angolo $\alpha\cong$ 64° e dunque $\beta\cong$ 80°

Sembrerebbe tutto corretto, ma abbiamo trascurato il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno dunque da $\sin^{-1}(0,9043)$ si può ottenere $\alpha\cong$ 64° oppure $\alpha\cong$ 116°, e dunque il triangolo non è univocamente determinato. Proseguendo nel ragionamento avremmo:

I° caso: $\alpha\cong$ 64° quindi il triangolo è acutangolo e $\beta\cong$ 80°; possiamo determinare b applicando nuovamente il teorema dei seni $\frac{13}{\sin(36°)}=\frac{b}{\sin(80°)} \rightarrow b=\frac{13\cdot 0,9848}{0,5877}\simeq 21\,cm$

II°caso: $\alpha\cong$ 116° quindi il triangolo è ottusangolo e $\beta\cong$ 28°; e come sopra si avrà

$$\frac{13}{\sin(36°)}=\frac{b}{\sin(28°)} \rightarrow b=\frac{13\cdot 0,4694}{0,5877}\simeq 10\,cm$$

Il problema ha due soluzioni.

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che α= 124°, a=26m., b=12m.

Dati: α= 124°, a=26m., b=12m Obiettivo: ? c, β, γ

L'angolo noto, opposto al lato a, è ottuso.

Applichiamo il teorema dei seni: $\frac{13}{\sin(124°)}=\frac{12}{\sin(\beta)} \rightarrow \sin(\beta)=\frac{12\cdot\sin(124°)}{26}\simeq\ldots\ldots\ldots$

In questo caso non ci sono dubbi: un triangolo non può avere due angoli ottusi. Potete completare voi la soluzione e otterrete $\beta\cong$……. quindi $\gamma\cong$ ……. e infine c$\cong$ ………

Problema

Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a=9\text{m}$, $b=2\sqrt{3}\,\text{m}$, $\beta=30°$

Come nel caso precedente abbiamo la misura di due lati e l'angolo opposto ad uno di essi; dunque per il teorema dei seni si ha $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)} \rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin(30°)} \rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)}=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}5} \rightarrow \sin(\alpha)=1{,}29$ impossibile!!! Il seno di un angolo ha come valore massimo 1.

Il problema non ha nessuna soluzione.

Esercizi sui triangoli generici: uso dei teoremi di Euler e di Carnot

89 Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui b=5, c=7, α=74°

90 In un triangolo sono noti: b=9, α=20° e β = 44°. Quanto vale la lunghezza a?

91 In un triangolo sono noti: a= 20, c=13 e β=75°. Quanto vale b?

92 Determina l'angolo β di un triangolo in cui a=10 Km, b=8 km, c=12 km

93 Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui a=12, c=15, β=65°

94 In un triangolo sono noti: a= 20, α=35° e β=20°. Quanto vale la lunghezza b?

95 In un triangolo sono noti: b= 12, c=4 e α=40°. Quanto vale a?

►9. Le funzioni circolari

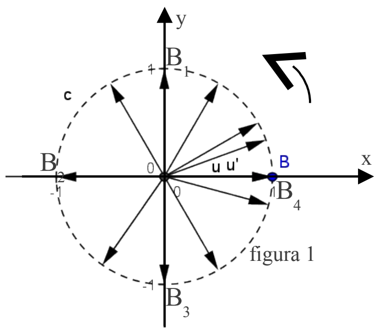


figura 1

Nel riferimento cartesiano ortogonale è assegnato il vettore $\vec{u}$ di modulo unitario $(|\vec{u}|=1)$, applicato nell'origine del riferimento e con direzione e verso coincidenti con quelle dell'asse x. Il suo estremo libero è il punto B(1,0).

Facciamo ruotare $\vec{u}$ intorno all'origine in senso antiorario finché torna ad occupare la posizione iniziale, cioè quando ha compiuto una rotazione di 360°. Movendosi con continuità, l'estremo B descrive la circonferenza con centro nell'origine tratteggiata nella figura; **le componenti del vettore cambiano con continuità e dipendono dall'angolo che**, in una certa posizione, **il vettore stesso forma con l'asse delle x**. Ad esempio quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 90°, l'estremo B si trova in $B_1(0,1)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 180°, l'estremo B si trova in $B_2(-1,0)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 270°, l'estremo B si trova in $B_3(0,-1)$; e dopo una rotazione completa (360°) torna a coincidere con la posizione iniziale $B_4 \equiv B(1,0)$

DEFINIZIONI. La **componente orizzontale** u_x del vettore unitario inclinato dell'angolo α sull'asse x, si chiama **coseno dell'angolo α**; in simboli $u_x=\cos(\alpha)$. Chiamiamo **seno dell'angolo α** la **componente verticale** u_y del vettore unitario inclinato dell'angolo α sull'asse x; in simboli $u_y=\sin(\alpha)$. Scriviamo $\vec{u}=(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ o anche $B=(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Confrontando questa definizione con quanto descritto sopra possiamo innanzitutto affermare che seno e coseno di un angolo sono numeri reali positivi, negativi o nulli a seconda dell'angolo formato dal vettore e quindi della posizione del punto B sulla circonferenza:

$\alpha=0° \rightarrow B(1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(0°);\sin(0°))$ quindi $\cos(0°)=1 \wedge \sin(0°)=0$

$\alpha=90° \rightarrow B(0;1) \rightarrow \vec{u}=(\cos(90°);\sin(90°))$ quindi $\cos(90°)=0 \wedge \sin(90°)=1$

$\alpha=180° \rightarrow B(-1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(180°);\sin(180°))$ quindi $\cos(180°)=-1 \wedge \sin(180°)=0$

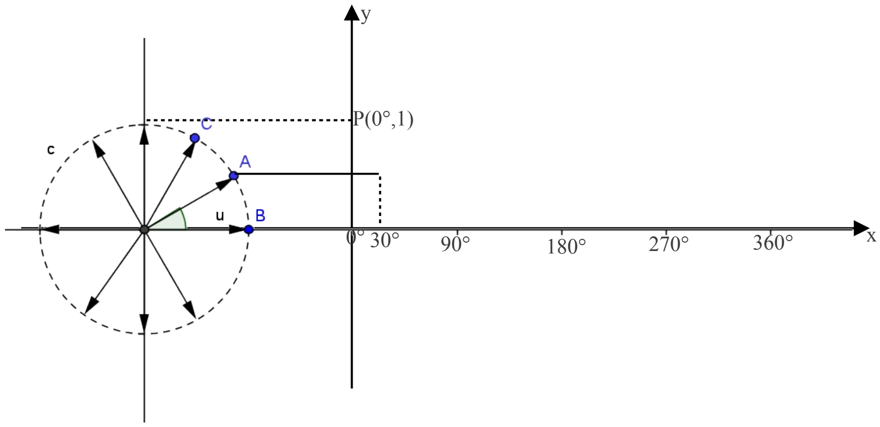
$\alpha=270° \rightarrow B(0;-1) \rightarrow \vec{u}=(\cos(270°);\sin(270°))$ quindi $\cos(270°)=0 \wedge \sin(0°)=-1$

$\alpha=360° \rightarrow B(1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(360°);\sin(360°))$ quindi $\cos(360°)=1 \wedge \sin(360°)=0$

Per alcuni valori intermedi dell'angolo si possono calcolare seno e coseno dell'angolo usando metodi geometrici, per altri valori si può far uso della calcolatrice scientifica.

Comunque dai risultati sopra ottenuti, soprattutto riguardando la figura 1, possiamo affermare che qualunque sia l'angolo si hanno le disuguaglianze: $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

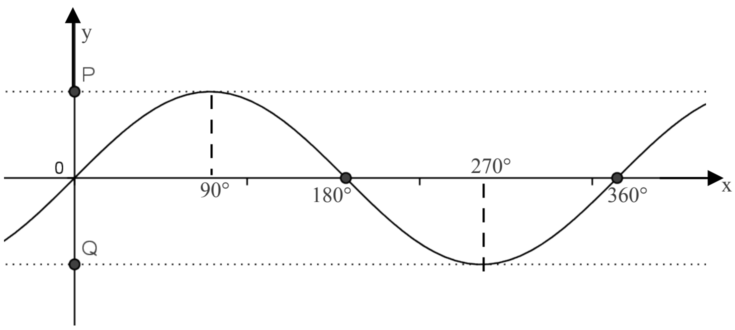
Ci proponiamo ora di tracciare il grafico della funzione y = sen(x). A questo scopo fermiamo la rotazione del vettore unitario ogni 30° (completate il disegno) e segniamo i punti A, C, ecc.



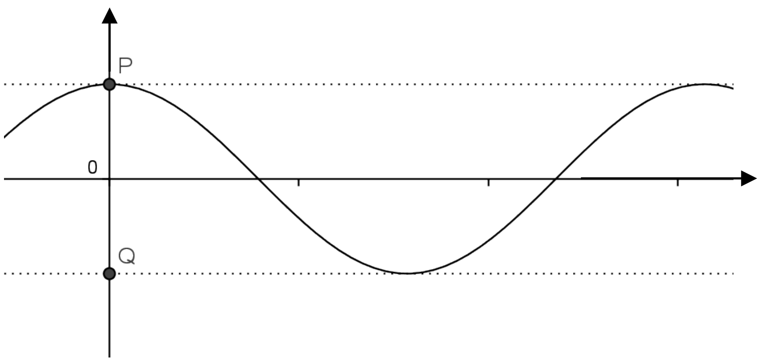
Accanto alla rotazione del vettore unitario abbiamo tracciato un riferimento cartesiano dove sull'asse x riportiamo le misure in gradi degli angoli descritti dal vettore unitario e sull'asse y è segnato il punto P di ascissa 0° e di ordinata 1. Ricordiamo che **sen(x) è l'ordinata dell'estremo libero del vettore unitario**.

Per ogni angolo x descritto riporteremo nel riferimento cartesiano sen(x). Il punto B ha ordinata nulla dunque il primo punto che dobbiamo segnare nel riferimento cartesiano per costruire il grafico di y = sen(x) è l'origine; per segnare il punto di coordinate (30°, sen(30°)) da A tracciamo la parallela all'asse x fino ad incontrare la parallela all'asse y tracciata da 30°.

Proseguite in questo modo per tutti gli altri punti della circonferenza. Unendo i punti trovati si giunge a rappresentare il grafico della funzione y = sen(x).



Noi l'abbiamo tracciato con Geogebra. Notiamo che il valore massimo 1 si ha per l'angolo di 90° mentre il minimo –1 si ha per l'angolo di 270°. Se il vettore unitario dopo un giro completo ricominciasse nuovamente a ruotare in senso antiorario (positivo), descrivendo angoli maggiori di 360°, il grafico si ripeterebbe identico al tratto compreso tra 0° e 360°. Per questo motivo diciamo che **la funzione y= sen(x) ha un andamento periodico**.



Sempre con Geogebra tracciamo il grafico della funzione y =cos(x); sfruttando quanto fatto all'inizio del paragrafo; *lasciamo al lettore di* segnare sul grafico i valori dell'angolo per cui il coseno è nullo, il valore per cui il coseno assume il valore minimo –1, il punto del grafico di ascissa =360°.

Per lo stesso discorso fatto sopra possiamo dire che **la funzione y= cos(x) ha un andamento periodico**.

Autori
Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Lucia Rapella: teoria, esercizi
Luca Pieressa: teoria, esercizi
Anna Rita Lorenzo: integrazioni
Claudio Carboncini: editing
Antonio Bernardo: coordinamento

Collaborazione, commenti e suggerimenti
Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento
Versione 3.1 del 31.05.2012