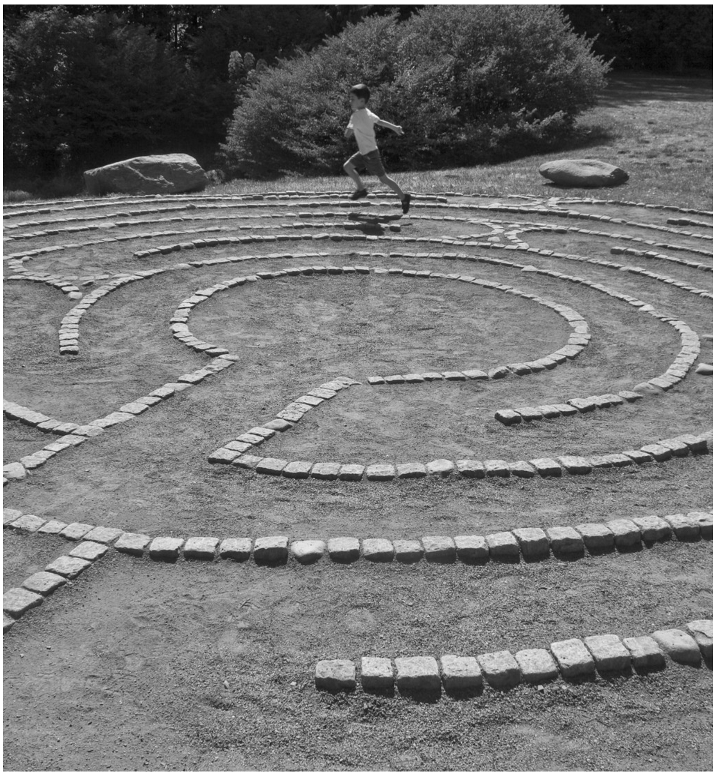
MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

6. ALGEBRA DI PRIMO GRADO



Maze photo by woodleywonderworks
taken from: http://www.flickr.com/photos/wwworks/2786242106

Indice

►1. Equazioni di grado superiore al primo riducibili al primo grado

Le equazioni di grado superiore al primo possono, in certi casi, essere ricondotte ad equazioni di primo grado, utilizzando la legge di annullamento del prodotto.

Esempio

- $x^2-4=0$

Il polinomio a primo membro può essere scomposto in fattori: $(x-2)(x+2)=0$
Per la legge di annullamento, il prodotto dei due binomi si annulla se $x-2=0$ oppure se $x+2=0$.
Di conseguenza si avranno le soluzioni: $x=2$, $x=-2$.

In generale, se si ha un'equazione di grado *n* scritta in forma normale $P(x)=0$
e se il polinomio $P(x)$ è fattorizzabile nel prodotto di *n* fattori di primo grado:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)=0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione si ottengono determinando le soluzioni delle *n* equazioni di primo grado, cioè risolvendo:

$$\begin{array}{l} x-a_1=0 \\ x-a_2=0 \\ x-a_3=0 \\ \dots \\ x-a_{n-1}=0 \\ x-a_n=0 \end{array}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sarà $S=\{a_{1,}\, a_{2,}\, a_{3,}\, \dots,\, a_{n-1}\,,\, a_n\}$

Esempio

- $x^2-x-2=0$

Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, ricercando quei due numeri la cui somma è pari a -1 e il cui prodotto è pari a -2, si ha: $(x+1)(x-2)=0$
Utilizzando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene il seguente insieme di soluzioni: $I.S.=\{-1,2\}$

- $x^4-5x^2+4=0$

Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, utilizzando la regola della scomposizione del particolare trinomio di secondo grado, si ottiene: $(x^2-1)(x^2-4)=0$.
Scomponendo ulteriormente in fattori si ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
Per la legge di annullamento del prodotto è necessario risolvere le equazioni:
x-1=0 da cui x=1
x+1=0 da cui x=-1
x-2=0 da cui x=2
x+2=0 da cui x=-2
L'insieme delle soluzioni: $I.S.=\{+1,-1,+2,-2\}$.

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al primo, riconducendole a equazioni di primo grado, ricercare le soluzioni tra i numeri reali.

1	$x^2+2x=0$	$I.S.=\{0,-2\}$	$x^2+2x-9x-18=0$	$I.S.=\{-2,+9\}$
2	$2x^2-2x-4=0$	$I.S.=\{2,-1\}$	$4x^2+16x+16=0$	$I.S.=\{-2\}$
3	$x^2-3x-10=0$	$I.S.=\{5,-2\}$	$x^2+4x-12=0$	$I.S.=\{2,-6\}$
4	$3x^2-6x-9=0$	$I.S.=\{3,-1\}$	$x^2+5x-14=0$	$I.S.=\{2,-7\}$
5	$-3x^2-9x+30=0$	$I.S.=\{2,-5\}$	$7x^2+14x-168=0$	$I.S.=\{4,-6\}$
6	$-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+63=0$	$I.S.=\{7,-6\}$	$\frac{7}{2}x^2+7x-168=0$	$I.S.=\{6,-8\}$
7	$x^4-16x^2=0$	$I.S.=\{0,4,-4\}$	$2x^3+2x^2-20x+16=0$	$I.S.=\{1,2,-4\}$
8	$-2x^3+6x+4=0$	$I.S.=\{2,-1\}$	$-x^6+7x^5-10x^4=0$	$I.S.=\{0,2,5\}$
9	$x^3-3x^2-13x+15=0$	$I.S.=\{1,5,-3\}$	$x^2+10x-24=0$	$I.S.=\{2,-12\}$
10	$2x^3-2x^2-24x=0$	$I.S.=\{0,-3,4\}$	$x^4-5x^2+4=0$	$I.S.=\{1,-1,2,-2\}$
11	$-x^3-5x^2-x-5=0$	$I.S.=\{-5\}$	$-4x^4-28x^3+32x^2=0$	$I.S.=\{0,1,-8\}$
12	$-4x^3+20x^2+164x-180=0$			$I.S.=\{1,9,-5\}$
13	$\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{4}x=0$	$I.S.=\{0,1,-1\}$	$-\frac{6}{5}x^3-\frac{6}{5}x^2+\frac{54}{5}x+\frac{54}{5}=0$	$I.S.=\{-1,3,-3\}$

14	$5x^3+5x^2-80x-80=0$	$I.S.=\{-1,4,-4\}$
15	$-3x^3+18x^2+3x-18=0$	$I.S.=\{1,-1,6\}$
16	$4x^3+8x^2-16x-32=0$	$I.S.=\{2,-2\}$
17	$x^3+11x^2+26x+16=0$	$I.S.=\{-1,-2,-8\}$
18	$2x^3+6x^2-32x-96=0$	$I.S.=\{4,-4,-3\}$
19	$2x^3+16x^2-2x-16=0$	$I.S.=\{1,-1,-8\}$
20	$-2x^3+14x^2-8x+56=0$	$I.S.=\{7\}$
21	$2x^3+12x^2+18x+108=0$	$I.S.=\{-6\}$
22	$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$	$I.S.=\{1,2,3,4\}$
23	$-2x^3-12x^2+18x+28=0$	$I.S.=\{-1,2,-7\}$
24	$-5x^4+125x^2+10x^3-10x-120=0$	$I.S.=\{1,-1,-4,6\}$
25	$\frac{7}{6}x^4-\frac{161}{6}x^2-21x+\frac{140}{3}=0$	$I.S.=\{1,-2,5,-4\}$
26	$(x^2-6x+8)(x^5-3x^4+2x^3)=0$	$I.S.=\{0,1,2,4\}$
27	$(25-4x^2)^4(3x-2)^2=0$	$I.S.=\left\{\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{2}{3}\right\}$
28	$(x-4)^3(2x^3-4x^2-8x+16)^9=0$	$I.S.=\{4,2,-2\}$
29	$(x^3-x)(x^5-9x^3)(x^2+25)=0$	$I.S.=\{0,1,-1,3,-3\}$
30	$(x^4+3x^3-3x^2-11x-6)(4x^6-216x^3+2916)=0$	$I.S.=\{-1,2,3,-3\}$
31	$2x^2-x-1=0$	R. 1; -1/2
32	$3x^2+5x-2=0$	R. -2; 1/3
33	$6x^2+x-2=0$	R. 1/2; -2/3
34	$2x^3-x^2-2x+1=0$	R. 1; -1; 1/2
35	$3x^3-x^2-8x-4=0$	R. -1; 2; -2/3
36	$8x^3+6x^2-5x-3=0$	R. -1; -1/2; 3/4
37	$6x^3+x^2-10x+3=0$	R. 1; 1/3 -3/2
38	$4x^4-8x^3-13x^2+2x+3=0$	R. 3; -1; 1/2; -1/2
39	$8x^4-10x^3-29x^2+40x-12=0$	R. 2; -2; 3/4; 1/2
40	$-12x^3+68x^2-41x+5=0$	R. 5; 1/2; 1/6
41	$x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+24=0$	R. 1; -1; -2; 3; -4

►2. Equazioni numeriche frazionarie

In un capitolo precedente abbiamo affrontato le equazioni di primo grado. Affrontiamo ora le equazioni in cui l'incognita compare anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Esempio

- $\frac{3x-2}{1+x}=\frac{3x}{x-2}$

Questa equazione si differenzia dalle equazioni affrontate in precedenza per il fatto che l'incognita compare anche al denominatore.
Riflettendo sulla richiesta del problema, possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore che rende la frazione al primomembro uguale alla frazione al secondo membro, esso non deve annullare nessuno dei due denominatori, poiché in questo caso renderebbe priva di significato la scrittura, in quanto frazioni con denominatore 0 sono prive di significato.

Per risolvere un'equazione frazionaria, prima di tutto dobbiamo renderla nella forma $\frac{F(x)}{G(x)}=0$.

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori $m.c.m.=(1+x)\cdot(x-2)$
Osserviamo che per x = -1 oppure per x = 2 le frazioni perdono di significato, in quanto si annulla il denominatore.
2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $1+x\neq 0$ e $x-2\neq 0$ cioè C.E. $x\neq -1\wedge x\neq 2$.
La ricerca dei valori che risolvono l'equazione viene ristretta all'insieme $D=\mathbb{R}-\{-1,2\}$ detto **dominio** dell'equazione o **insieme di definizione.**
3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione che si trova al secondo membro e riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) $\frac{(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0$
4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste. L'equazione diventa: $(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)=0$
5° passo: eseguiamo le moltiplicazioni e sommiamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x-2x+4-3x-3x^2=0 \quad\to\quad -11x=-4$
6° passo: dividiamo ambo i membri per –11, per il secondo principio di equivalenza si ha: $x=\frac{4}{11}$
7° passo: confrontiamo il valore trovato con le C.E.: in questo caso la soluzione appartiene al dominio D, quindi possiamo concludere che è accettabile. L'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{4}{11}\right\}$.

Esempio

- $\frac{x^2+x-3}{x^2-x}=1-\frac{5}{2x}$

1° determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo prima scomporli in fattori. Riscriviamo: $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}=1-\frac{5}{2x}$ $\quad m.c.m.=2x\cdot(x-1)$;
2° **C**ondizioni di **E**sistenza: $x-1\neq 0\wedge 2x\neq 0$, cioè $x\neq 1\wedge x\neq 0$, il dominio è $D=\mathbb{R}-\{1,0\}$;
3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}-1+\frac{5}{2x}=0$; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri $\frac{2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5}{2x\cdot(x-1)}=0$.
4° passo: moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5=0$;
5° passo: riduciamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $9x=11$;
6° passo: dividiamo ambo i membri per 9 , otteniamo: $x=\frac{11}{9}$
7° passo: confrontando con le C.E., la soluzione appartiene all'insieme **D**, dunque è accettabile e l'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{11}{9}\right\}$.

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie

42 $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\{-3\}$ $\frac{1}{x-1}=2$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

43 $1-\frac{1}{x+1}=0$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{2x-4}{x-2}=0$ $I.S.=\emptyset$

44 $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}=1$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{1}{x-3}=\frac{x}{3-x}$ $I.S.=\{-1\}$

45 $\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{5}{x+2}$ $I.S.=\left\{\frac{11}{6}\right\}$ $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+1}$ $I.S.=\emptyset$

46 $\frac{1}{3-x}-\frac{4}{2x-6}=0$ $I.S.=\{\emptyset\}$ $\frac{x^2-1}{x-1}-1=2x+1$ $I.S.=\{-1\}$

47 $\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\emptyset$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2-2x}{x^3}$ $I.S.=\{2,-1\}$

48 $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x-1}{x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\frac{x+3}{x+1}=x+3$ $I.S.=\{0,-3\}$

49 $\frac{3x+1}{3x^2+x}=1$ $I.S.=\{1\}$ $\frac{6+x}{x-3}=\frac{x^2}{x-3}$ $I.S.=\{-2\}$

50 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $I.S.=\emptyset$ $\frac{5}{x-2}-\frac{6}{x+1}=\frac{3x-1}{x^2-x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

51 $\frac{1}{(1-x)}-\frac{x}{(x-1)}=0$ $I.S.=\{-1\}$ $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{1+x}=0$ $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

52 $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4x^2+1}{4x^2-1}=2$ $I.S.=\{-1\}$ $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2-x}=0$ $I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

53 $\frac{x-1}{x^2-2x+1}=\frac{2}{2-2x}$ $I.S.=\emptyset$ $4-x^2=\frac{x^2+5x+6}{x+2}-1$ $I.S.=\{1\}$

54 $\frac{5}{5x+1}+\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{1-2x}$ $I.S.=\left\{\frac{2}{25}\right\}$ $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $I.S.=\{\emptyset\}$

55 $\frac{30}{x^2-25}+\frac{3}{5-x}=0$

56 $1+\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x-2}+\frac{1-x^2}{x^2-x-2}$ $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

57 $-\frac{3x}{6-2x}+\frac{5x}{10-5x}=\frac{1-x}{4-2x}$ $I.S.=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

58 $\frac{18x^2-9x-45}{4-36x^2}-\frac{6x+1}{9x-3}+\frac{21x-1}{18x+6}=0$

59 $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2-x}=\frac{x+3}{x^2+x-6}$ $I.S.=\emptyset$

60 $\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{6-8x^2}{1-4x^2}$ $I.S.=\emptyset$

61 $\frac{3x}{x-2}+\frac{6x}{x^2-4x+4}=\frac{3x^2}{(x-2)^2}$ $I.S.=\mathbb{R}-\{2\}$

62 $(4x+6)\left(\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=0$ $I.S.=\left\{-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right\}$

63 $\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{x^2}{x^2-5x}=0$ $I.S.=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

64 $\frac{1+2x}{x^2+2x}+\frac{x^3-6x+1}{x^2-4}=\frac{x^2-2x}{x-2}+\frac{1}{x^2-2x}$ $I.S.=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$

65 $\frac{1}{3x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{10x+4}{3x^2-4x-4}$ $\quad \mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{3},2\right\}$

66 $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{x-4}=\frac{4x-9}{x^2-x-12}$ $\quad x=4$ soluzione non accettabile $\quad I.S.=\{1\}$

67 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2-1)}+1$ $\quad I.S.=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

68 $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}-x$ $\quad I.S.=\{1\}$

69 $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+2}=\frac{3x-6}{x^2+5x+6}$ $\quad I.S.=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

70 $\frac{2x-3}{x+2}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-2x-8}$ $\quad I.S.=\{2,3\}$

71 $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{1}{x^2+x-2}$ $\quad I.S.=\emptyset$

72 $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{12-x}{x^2-1}$ $\quad I.S.=\{2\}$

73 $\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x}$ $\quad I.S.=\{-5,+1\}$

74 $\left(40-10x^2\right)^3\cdot\left(\frac{3x-1}{x+2}-\frac{3x}{x+1}\right)=0$ $\quad I.S.=\left\{2,-\frac{1}{4}\right\}$

75 $\frac{x}{2x+1}+\frac{x+1}{2(x+2)}=\frac{x-1}{2x^2+5x+2}$ $\quad I.S.=\emptyset$

76 $\frac{3x+1}{x^2-9}+\frac{2}{3x^2-9x}=\frac{3}{x+3}$ $\quad I.S.=\left\{-\frac{3}{16}\right\}$

77 $\frac{3(2x-3)}{x^3+27}+\frac{1}{x+3}=\frac{x}{x^2-3x+9}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}-\{-3\}$

78 $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x-1}=0$ $\quad$ R. $x=\frac{3}{2}$

79 $\frac{2x-1}{3x^2-75}-\frac{3-x}{x+5}+\frac{x-3}{10-2x}=\frac{7}{25-x^2}$ $\quad$ R. $x=\frac{35}{3}$

80 $\frac{x+2}{(x-3)^2}-\frac{1}{x-3}=\frac{4}{9-3x}$ $\quad$ R. $x=-\frac{3}{4}$

81 $\frac{5x}{3x^2-18x+15}-\frac{2}{3x-3}=\frac{5}{18x-90}$ $\quad$ R. $x=-5$

82 $(x-4)(x+3)=\frac{(x-4)(x+3)}{x-2}$ $\quad I.S.=\{4,-3,3\}$

83 $\left(1-\frac{1}{2}x\right):\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\left(\frac{2x+1}{6x+3}-\frac{1}{2}x\right)+\frac{x^2}{2x+4}$ $\quad I.S.=\{4\}$

84 $\frac{3x-1}{1-2x}+\frac{x}{2x-1}-\frac{x^3-8}{x^2-4}:\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}=\frac{2-3x}{2x-6}\cdot\frac{x^2-9}{4-9x^2}-\frac{6x+7}{6}$ $\quad I.S.=\left\{-\frac{26}{25}\right\}$

85 $\left(\frac{2x}{6x-3}+\frac{x}{4-8x}\right)+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}\right)\cdot\frac{2x\left(x^2-1\right)}{8x^2-4x}=\frac{x^2(5x-3)}{3(2x+1)(2x-1)^2}$ $\quad I.S.=\left\{\frac{12}{5}\right\}$

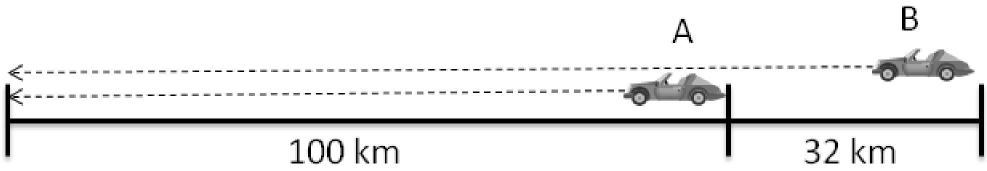
86 $\frac{3x^2-2x+3}{x^2-3x}+\frac{x+2}{3-x}=\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\left(\frac{x^2}{x^3-27}+\frac{x}{x-3}\right):\frac{3x}{3x^3-81}+\frac{x^2-x+2}{3-x}$ $\quad I.S.=\{-30\}$

87 Osservando i due membri dell'equazione, senza svolgere i calcoli, puoi subito affermare che non esiste alcun numero reale che rende vera l'uguaglianza? $(2x-4x^2+7)^6=-\frac{1}{(x^2-5x+7)^4}$

88 Quale numero occorre aggiungere a numeratore e denominatore della frazione tre settimi perchè essa raddoppi di valore? R. [x=21]

89 Quale numero occorre aggiungere a numeratore e denominatore della frazione due settimi perchè essa triplichi di valore? R. {x=28]

90 Due amici A e B partono con le loro automobili nello stesso istante da due località diverse; A fa un viaggio di 100 Km a una certa velocità, B fa un viaggio di 132 Km ad una velocità che supera quella dell'amico di 20 Km/h. I due amici arrivano nello stesso istante all'appuntamento.
Qual è la velocità di A?



Traccia di soluzione
1. Se A e B partono insieme e arrivano insieme significa che hanno impiegato lo stesso tempo per fare il proprio viaggio;
2. il tempo è dato dal rapporto tra lo spazio percorso e la velocità;
3. la velocità di A è l'incognita del problema: la indichiamo con x;
4. l'equazione risolvente è $\frac{110}{x}=\frac{132}{x+20}$.

Prosegui nella risoluzione.

91 Per percorrere 480Km un treno impiega 3 ore di più di quanto impiegherebbe un aereo a percorrere 1920 Km. L'aereo viaggia ad una velocità media che è 8 volte quella del treno. Qual è la velocità del treno?

►3. Equazioni letterali

Quando si risolvono problemi, ci si ritrova a dover tradurre nel linguaggio simbolico delle proposizioni del tipo: *Un lato di un triangolo scaleno ha lunghezza pari a k volte la lunghezza dell'altro e la loro somma è pari a 2k.*
Poiché la lunghezza del lato del triangolo non è nota, ad essa si attribuisce il valore incognito x e quindi la proposizione viene tradotta dalla seguente equazione: $x+kx=2k$.
È possibile notare che i coefficienti dell'equazione non sono solamente numerici, ma compare una lettera dell'alfabeto diversa dall'incognita. Qual è il ruolo della lettera k?
Essa prende il nome di **parametro** ed è una costante che rappresenta dei numeri fissi, quindi, può assumere dei valori prefissati. Ogni volta che viene fissato un valore di k, l'equazione precedente assume una diversa forma. Infatti si ha:

Valore di k	Equazione corrispondente
$k=0$	$x=0$
$k=2$	$x+2x=4$
$k=-\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}x=-1$

Si può quindi dedurre che il parametro diventa una costante, all'interno dell'equazione nell'incognita x, ogni volta che se ne sceglie il valore.
Si supponga che il parametro k assuma valori all'interno dell'insieme dei numeri reali. Lo scopo è quello di risolvere l'equazione, facendo attenzione a rispettare le condizioni che permettono l'uso dei principi d'equivalenza e che permettono di ridurla in forma normale.
Riprendiamo l'equazione $x+kx=2k$, raccogliamo a fattore comune la x si ha $(k+1)x=2k$.
Per determinare la soluzione di questa equazione di primo grado, è necessario utilizzare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per il coefficiente $k+1$.
Si ricordi però che il secondo principio ci permette di moltiplicare o dividere i due membri dell'equazione per una stessa espressione, purché questa sia diversa da zero.
Per questa ragione, nella risoluzione dell'equazione $(k+1)x=2k$ è necessario distinguere i due casi:

- se $k+1\neq 0$, cioè se $k\neq -1$, è possibile dividere per $k+1$ e si ha $x=\frac{2k}{k+1}$;
- se $k+1=0$, cioè se $k=-1$, sostituendo tale valore all'equazione si ottiene l'equazione $(-1+1)x=2\cdot(-1)$, cioè $0\cdot x=-2$ che risulta impossibile.

Riassumendo si ha:

$x+kx=2k$ con $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Soluzione**	**Equazione**
$k=-1$	nessuna	Impossibile
$k\neq -1$	$x=\frac{2k}{k+1}$	Determinata

Ritorniamo ora al problema sul triangolo isoscele, spesso nell'enunciato del problema sono presenti delle limitazioni implicite che bisogna trovare. Infatti, dovendo essere x un lato del triangolo esso sarà un numero reale positivo. Di conseguenza, dovendo essere l'altro lato uguale a k volte x, il valore di k deve necessariamente essere anch'esso positivo, ovvero $k>0$. Di conseguenza il parametro k non può mai assumere il valore −1 e quindi il problema geometrico ammette sempre una soluzione.

Questa analisi effettuata sui valori che può assumere il parametro k, prende il nome di **discussione dell'equazione**.

Procedura per stabile quando una equazione è determinata, indeterminata, impossibile
In generale, data l'equazione $ax+b=0$ si ha $ax=-b$ e quindi:

- **se $a\neq 0$, l'equazione è determinata e ammette l'unica soluzione $x=-\frac{b}{a}$;**
- **se $a=0$ e $b\neq 0$, l'equazione è impossibile;**
- **se $a=0$ e $b=0$, l'equazione è soddisfatta da tutti i valori reali di x, ovvero è indeterminata.**

Esempi

- $1+(x+m)=(x+1)^2-x(x+m)$

Dopo aver fatto i calcoli si ottiene l'equazione $(m-1)\cdot x=-m$ e quindi si ha:
Se $m-1\neq 0$, cioè se $m\neq 1$, è possibile dividere ambo i membri per $m-1$ e si ottiene l'unica soluzione $x=-\frac{m}{m-1}$;
Se $m-1=0$, cioè se $m=1$, sostituendo nell'equazione il valore 1 si ottiene $0\cdot x=-1$; che risulta impossibile.

- $(k+3)x=k+4x(k+1)$

Effettuando i prodotti si ottiene l'equazione: $(3k+1)x=-k$ e quindi si ha:
Se $3\mathrm{k}+1\neq 0$, cioè se $k\neq -\frac{1}{3}$, è possibile dividere ambo i membri per 3k+1 e si ottiene l'unica soluzione $x=\frac{-k}{3\mathrm{k}+1}$
Se $k=-\frac{1}{3}$, sostituendo questo valore di k nell'equazione si ottiene $0\cdot x=\frac{1}{3}$, che risulta un'equazione impossibile.

- $a^2\cdot x=a+1+x$

Portiamo al primo membro tutti i monomi che contengono l'incognita $a^2\cdot x-x=a+1$
Raccogliamo a fattore comune l'incognita $x\cdot(a^2-1)=a+1$
Scomponendo in fattori si ha l'equazione $x\cdot(a-1)(a+1)=a+1$
I valori di *a* che annullano il coefficiente dell'incognita sono *a=1* e *a=-1*
Nell'equazione sostituisco a=1, ottengo l'equazione 0x=2 che è impossibile.
Sostituisco a=-1, ottengo l'equazione 0x=0 che è indeterminata.
Escludendo i casi a=1 e a=-1, che annullano il coefficiente della *x* posso applicare il secondo principio di equivalenza delle equazione e dividere 1° e 2° membro per *a+1*, ottengo $x=\frac{a+1}{(a+1)\cdot(a-1)}=\frac{1}{a-1}$.

Ricapitolando

Se a=1 allora $I.S.=\emptyset$; se a=-1 allora $I.S.\mathbb{R}$; se $a\neq +1\wedge a\neq -1$ allora $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali nell'incognita x.

92 $1+2x=a+1-2x$ $\qquad x=\frac{a}{4}\ \forall\ a\in\mathbb{R}$

93 $2x-\frac{7}{2}=ax-5$ $\qquad$ se a=2 $I.S.\ \emptyset$; se $a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2(a-2)}\right\}$

94 $b^2x=2b+bx$ $\qquad$ se b=0 $I.S.=\mathbb{R}$, b=1 $I.S.\ \emptyset$, $b\neq 0\wedge b\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{2}{b-1}\right\}$

95 $ax+x-2a^2-2ax=0$

96 $ax+2=x+3$ $\qquad$ se $a=1$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

97 $3ax-2a=x\cdot(1-2a)+a\cdot(x-1)$

98 $k(x+2)=k+2$ $\qquad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2-k}{k}\right\}$

99 $(b+1)(x+1)=0$ $\qquad$ se $b=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $b\neq -1$ $I.S.=\{-1\}$

100 $k^2x+2k=x+2$ $\qquad$ $k=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $k=-1$ $I.S.=\emptyset$; $k\neq 1\wedge k\neq -1$ $I.S.=\left\{-\frac{2}{k+1}\right\}$

101 $x\cdot(3-5a)+2\cdot(a-1)=(a-1)\cdot(a+1)$

102 $(a-1)(x+1)=x+1$ $\qquad$ se $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 2$ $I.S.=\{-1\}$

103 $x+2a\cdot(x-2a)+1=0$

104 $(a-1)(x+1)=a-1$ $\qquad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{0\}$

105 $2k(x+1)-2=k(x+2)$ $\qquad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{k}\right\}$

106 $a(a-1)x=2a(x-5)$ $\qquad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{10}{3-a}\right\}$

107 $3ax+a=2a^2-3a$ $\qquad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3}\cdot(a-2)\right\}$

108 $3x-a=a(x-3)+6$ $\qquad$ se $a=3$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 3$ $I.S.=\{2\}$

109 $2+2x=3ax+a-a^2x$ $\qquad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 2\wedge a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

110 $x(a^2-4)=a+2$ $\qquad$ $a=2$ $I.S.=\emptyset$; $a=-2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a\neq -2\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-2}\right\}$

111 $(x-m)(x+m)=(x+1)(x-1)$ $\qquad$ $m=1\vee m=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $m\neq 1\wedge m\neq -1$ $I.S.=\emptyset$

112 $(a-2)^2x+(a-2)x+a-2=0$ $\qquad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 1\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{1-a}\right\}$

113 $(9a^2-4)x=2(x+1)$ $\qquad$ $a=-\frac{2}{3}\ \vee\ a=\frac{2}{3}$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -\frac{2}{3}\wedge a\neq \frac{2}{3}$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3(3a^2-2)}\right\}$

114 $(a-1)x=a^2-1$ $\qquad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{a+1\}$

115 $(a+2)x=a^2+a-1$ $\qquad$ se $a=-2$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq -2$ $I.S.=\left\{\frac{a^2+a-1}{a+2}\right\}$

116 $a(x-1)^2=a(x^2-1)+2a$ $\qquad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\{0\}$

117 $a^3x-a^2-4ax+4=0$ $\qquad$ $a=-2\vee a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=0$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a}\right\}$

118 $bx(b^2+1)-(bx-1)(b^2-1)=2b^2$ $\qquad$ se $b=0$ $I.S.=\emptyset$; se $b\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{1+b^2}{2b}\right\}$

119 $a(a-5)x+a(a+1)=-6(x-1)$ $\qquad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=3$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 2\wedge a\neq 3$ $I.S.=\left\{\frac{a+3}{3-a}\right\}$

120 $(x+a)^2-(x-a)^2+(a-4)(a+4)=a^2$ $\qquad$ $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{4}{a}\right\}$; $a=0$ $I.S.=\emptyset$

Equazioni con due parametri

Esempio

- $(b+a)x-(b+2)(x+1)=-1$

Mettiamo l'equazione in forma canonica

$bx+ax-bx-b-2x-2=-1$

$(a-2)x=b+1$

- se $a-2=0$ l'equazione è impossibile o indeterminata
  - se $b+1=0$ è indeterminata
  - se $b+1\neq 0$ è impossibile
- se $a-2\neq 0$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x=\dfrac{b+1}{a-2}$

Riassumendo:

$a=2\wedge b=-1 \rightarrow I.S.=\mathbb{R}$

$a=2\wedge b\neq -1 \rightarrow I.S.=\emptyset$

$a\neq 2\wedge b\neq -1 \rightarrow I.S.=\left\{\dfrac{b+1}{a-2}\right\}$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni nell'incognita x con due parametri

121 $(m+1)(n-2)x=0$ $\quad m=-1\vee n=2\ \ I.S.=\mathbb{R}\,;\ m\neq -1\wedge n\neq 2\ \ I.S.=\{0\}$

122 $m(x-1)=n$ $\quad m=0\wedge n\neq 0\ I.S.=\emptyset\,;\ m=0\wedge n=0\ I.S.=\mathbb{R}\,;\ m\neq 0\ I.S.=\left\{\dfrac{m+n}{m}\right\}$

123 $(a+1)(b+1)x=0$ $\quad a=-1\vee b=-1\ \ I.S.=\mathbb{R}\,;\ \ a\neq -1\wedge b\neq -1\ I.S.=\{0\}$

124 $(m+n)(x-1)=m-n$ $\quad m=n=0\ \ I.S.\mathbb{R}\,;\ m=-n\neq 0\ \ I.S.=\emptyset\,;\ m\neq -n\ \ I.S.=\left\{\dfrac{2m}{m+n}\right\}$

125 $x(2a-1)+2b(x-2)=-4a-x$ $\quad a=b=0\ \ I.S.\mathbb{R}\,;\ a=-b\neq 0\ \ I.S.=\emptyset\,;\ a\neq -b\ \ I.S.=\left\{\dfrac{2(b-a)}{a+b}\right\}$

126 $ax-3+b=2(x+b)$ $\quad \begin{cases} a=2\wedge b=-3 \text{ eq. ind.}\\ a=2\wedge b\neq -3 \text{ eq. imp.}\\ a\neq 2\wedge b\neq -3\ \ x=\dfrac{b+3}{a-2}\end{cases}$

127 $(a+1)x=b+1$

$a=-1\wedge b=-1\ \ I.S.=\mathbb{R}\,;\ \ a=-1\wedge b\neq -1\ \ I.S.=\emptyset\,;\ \ a\neq -1\ \ I.S.=\left\{\dfrac{b+1}{a+1}\right\}$

128 $(a+b)(x-2)+3a-2b=2b(x-1)$

$a=b=0\, I.S.\,\mathbb{R}\,;\ a=b\neq 0\, I.S.=\emptyset\,;\ a\neq 0\, I.S.=\left\{\dfrac{2b-a}{a-b}\right\}$

129 $x(x+2)+3ax=b+x^2$

$a\neq -\dfrac{2}{3}\ I.S.=\left\{\dfrac{b}{2+3a}\right\}\,;\ a=-\dfrac{2}{3}\wedge b=0\ I.S.=\mathbb{R}\,;\ a=-\dfrac{2}{3}\wedge b\neq 0\ I.S.=\emptyset$

130 $(x-a)^2+b(2b+1)=(x-2a)^2+b-3a^2$

$a=0\wedge b=0\ I.S.=\mathbb{R}\,;\ a=0\wedge b\neq 0\ I.S.=\emptyset\,;\ a\neq 0\ I.S:=\left\{-\dfrac{b^2}{a}\right\}$

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene solo il parametro

Esempio

■ $\frac{x+a}{2a-1}-\frac{1}{a-2a^2}=\frac{x}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$

Questa equazione è intera, pur presentando termini frazionari.
Sappiamo che ogni volta che viene fissato un valore per il parametro, l'equazione assume una forma diversa; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme dei numeri reali quei valori che annullano il denominatore.

Per $a=0 \vee a=\frac{1}{2}$ si annullano i denominatori quindi l'equazione è priva di significato.

Per risolvere l'equazione abbiamo bisogno delle Condizioni di Esistenza $C.E.\ a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$

Procediamo nella risoluzione, riduciamo allo stesso denominatore ambo i membri dell'equazione:
$\frac{a\cdot(x+a)+1}{a\cdot(2a-1)}=\frac{x\cdot(2a-1)}{a\cdot(2a-1)}$,
applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m. $ax+a^2+1=2ax-x$
che in forma canonica è $x\cdot(a-1)=a^2+1$.
Il coefficiente dell'incognita dipende dal valore assegnato al parametro; procediamo quindi alla
Se $a-1 \neq 0$ cioè $a \neq 1$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $a-1$ ottenendo $x=\frac{a^2+1}{a-1}$ L'equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$;
Se $a-1=0$ cioè $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$. L'equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$.
Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$a=0 \vee a=\frac{1}{2}$		Priva di significato
$a=1$	$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq 1$	$I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$	Determinata

■ $\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}=0$

Scomponendo i denominatori troviamo il m.c.m. = a^2-4
Pertanto se a=2 o a=-2 il denominatore si annulla e quindi l'equazione è priva di significato
Per poter procedere nella risoluzione poni le C.E. $a \neq -2 \wedge a \neq 2$
Riduci allo stesso denominatore: $\frac{(a-x)(a+2)+2\mathrm{ax}-(2-x)(a-2)}{(a+2)(a-2)}=0$
Applica il secondo principio per eliminare il denominatore e svolgi i calcoli.
Arrivi alla forma canonica è $2\cdot(a-2)\cdot x=a^2+4$. Per le C.E. sul parametro il coefficiente dell'incognita è sempre diverso da zero, pertanto puoi dividere per 2(a-2) e ottieni $x=\frac{a^2+4}{2(a-2)}$.

Riassumendo si ha:

$\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}$ con $a \in \mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$a=-2 \vee a=+2$		Priva di significato
$a \neq -2 \wedge a \neq +2$	$I.S.=\left\{\frac{a^2+4}{2(a-2)}\right\}$	Determinata

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene l'incognita ma non il parametro

Esempio

■ $\frac{x+4a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$

Questa equazione è frazionaria o fratta perché nel denominatore compare l'incognita.
Sappiamo che risolvere un'equazione significa determinare i valori che sostituiti all'incognita rendono vera l'uguaglianza tra il primo e il secondo membro. Non sappiamo determinare tale valore solamente analizzando l'equazione, ma certamente possiamo dire che non dovrà essere x = 0 perché tale valore, annullando i denominatori, rende privi di significato entrambi i membri dell'equazione.
Poniamo allora una condizione sull'incognita: la soluzione è accettabile se $x\neq 0$.
Non abbiamo invece nessuna condizione sul parametro.
Procediamo quindi con la riduzione allo stesso denominatore di ambo i membri dell'equazione
$\frac{2x+8a}{6x}=\frac{6ax-2x-2a}{6x}$; eliminiamo il denominatore che per la condizione posta è diverso da zero.
Eseguiamo i calcoli al numeratore e otteniamo $4x-6ax=-10a$ da cui la forma canonica:
$x\cdot(3a-2)=5a$.
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi procediamo alla discussione.
Se $3a-2\neq 0$ cioè $a\neq\frac{2}{3}$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $3a-2$ ottenendo $x=\frac{5a}{3a-2}$. L'equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$. A questo punto dobbiamo ricordare la condizione sull'incognita, cioè $x\neq 0$, quindi la soluzione è accettabile se
$x=\frac{5a}{3a-2}\neq 0 \quad\rightarrow\quad a\neq 0$
Se $3a-2=0$ cioè $a=\frac{2}{3}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{10}{3}$, cioè l'equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$.
Riassumendo si ha la tabella:

$\frac{x+a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
	$x\neq 0$		
$a=\frac{2}{3}$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a\neq\frac{2}{3}$		$I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$	Determinata
$a\neq\frac{2}{3}$ et $a\neq 0$		$x=\frac{5a}{3a-2}$ accettabile	

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene sia il parametro che l'incognita

Esempio

■ $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b\in\mathbb{R}$

L'equazione è fratta; il suo denominatore contiene sia l'incognita che il parametro.

Scomponiamo in fattori i denominatori $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{x\cdot(b-1)}$

- determiniamo le condizioni di esistenza che coinvolgono il parametro $C.E.\ b\neq 1$;
- determiniamo le condizioni sull'incognita: soluzione accettabile se $x\neq 0$.

Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamolo in quanto per le condizioni poste è diverso da zero.
L'equazione canonica è $x\cdot(2b-1)=b+1$.
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi occorre fare la discussione:

- se $2b-1\neq 0$ cioè $b\neq\frac{1}{2}$ possiamo dividere ambo i membri per $2b-1$, otteniamo $x=\frac{b+1}{2b-1}$

  L'equazione è determinata, l'insieme delle soluzioni è $I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$; la soluzione è accettabile se verifica la condizione di esistenza $x\neq 0$ da cui si ha $x=\frac{b+1}{2b-1}\neq 0 \rightarrow b\neq -1$, cioè se b=-1 l'equazione ha una soluzione che non è accettabile, pertanto è impossibile.
- se $2b-1=0$ cioè $b=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{3}{2}$. L'equazione è impossibile, l'insieme delle soluzioni è vuoto: $I.S.=\emptyset$.

La tabella che segue riassume tutti i casi:

$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$b=1$			Priva di significato
$b\neq 1$	$x\neq 0$		
$b=\frac{1}{2}\vee b=-1$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$	Determinata
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$x=\frac{b+1}{2b-1}$ accettabile	

Risolvi e discuti le seguenti equazioni che presentano il parametro al denominatore

131 $\frac{x+2}{6a}+\frac{x-1}{2a^2}=\frac{1}{3a}$ $\begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq -3 \quad I.S.=\left\{\frac{3}{a+3}\right\} \end{cases}$

132 $\frac{x-1}{b}+\frac{2x+3}{4b}=\frac{x}{4}$ $\begin{cases} b=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ b=6 \quad I.S.=\emptyset \\ b\neq 0 \wedge b\neq 6 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{6-b}\right\} \end{cases}$

133 $\frac{2x-1}{3a}+\frac{x}{3}=\frac{2}{a}$ $\begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \quad I.S.=\left\{\frac{7}{2+a}\right\} \end{cases}$

134 $\frac{x}{a}+\frac{2x}{2-a}=\frac{a-x+2}{2a-a^2}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=2 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq -3 \quad I.S.=\left\{\frac{a+2}{a+3}\right\} \end{cases}$

135 $\frac{x}{a-1}+8=4a-\frac{x}{a-3}$ $\begin{cases} a=1 \vee a=3 \text{ equaz. priva di significato} \\ a\neq 1 \wedge a\neq 3 \quad I.S.=\{(a-1)(a-3)\} \end{cases}$

136 $\frac{x-1}{a-1}+\frac{x+a}{a}=\frac{a-1}{a}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=1 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=\frac{1}{2} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq \frac{1}{2} \wedge a\neq 1 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{2a-1}\right\} \end{cases}$

137 $\frac{a^2-9}{a+2}x=a-3$ $\begin{cases} a=-2 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a=3 \quad I.S.=\mathbb{R} \\ a\neq -3 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq 3 \quad I.S.=\left\{\frac{a+2}{a+3}\right\} \end{cases}$

138 $\frac{x+2}{a^2-2a}+\frac{x}{a^2+2a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a^2-4}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=-2 \vee a=+2 \text{ priva di signif.} \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq +2 \quad I.S.=\left\{-\frac{a}{2}\right\} \end{cases}$

139 $\frac{x+1}{a^2+2a+1}+\frac{2x+1}{a^2-a-2}-\frac{2x}{(a+1)(a-2)}+\frac{1}{a-2}=0$ $\begin{cases} a=2 \vee a=-1 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a\neq 2 \wedge a\neq -1 \quad I.S.\left\{\frac{a(a+4)}{2-a}\right\} \end{cases}$

140 $\frac{x+1}{a-5}+\frac{2x-1}{a-2}=\frac{2}{a^2-7a+10}$ $\begin{cases} a=5 \vee a=2 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=4 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 5 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq 4 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{3(4-a)}\right\} \end{cases}$

141 $\frac{x+2}{b-2}+\frac{2}{b^2-4b+4}+\left(\frac{1}{b-2}+\frac{x}{b-1}\right)\cdot(b-1)=0$ $\begin{cases} b=2 \vee b=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 2 \wedge b\neq 1 \quad I.S.\left\{\frac{b}{2-b}\right\} \end{cases}$

142 $\frac{x-2}{t^2+3t}+\frac{x-1}{t+3}=\frac{x-2}{t^2}+\frac{1}{t+3}$ $\begin{cases} t=0 \vee t=-3 \text{ equaz. priva di significato} \\ t^2=3 \quad I.S.=\mathbb{R} \\ t\neq 0 \wedge t\neq -3 \wedge t^2\neq 3 \quad I.S.=\{2\} \end{cases}$

143 $\frac{3+b^3x}{7b^2-b^3}+\frac{(2b^2+b)x+1}{b(b-7)}=\frac{3b^2x+1}{b^2}-2x$ $\begin{cases} b=0 \vee b=7 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 0 \wedge b\neq 7 \quad I.S.=\left\{-\frac{1}{2b^2}\right\} \end{cases}$

144 $\frac{x+m}{x+1}=1$ $\begin{cases} m=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-1\} \\ m\neq 1 \quad I.S.=\emptyset \end{cases}$

145 $\frac{3}{x+1}=2a-1$ $\quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq\frac{1}{2} \quad I.S.=\left\{-\frac{2(a-2)}{2a-1}\right\} \end{cases}$

146 $\frac{2a-x}{x-3}-\frac{ax+2}{9-3x}=0$ $\quad \begin{cases} a=3\vee a=\frac{7}{9} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 3\wedge a\neq\frac{7}{9} \quad I.S.=\left\{\frac{2(3a+1)}{3-a}\right\} \end{cases}$

147 $\frac{t-1}{x-2}=2t$ $\quad \begin{cases} t=0\vee t=1 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq 0\wedge t\neq 1 \quad I.S.=\left\{\frac{5t-1}{2t}\right\} \end{cases}$

148 $\frac{k}{x+1}=\frac{2k}{x-1}$ $\quad \begin{cases} k=0 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{1,-1\} \\ k\neq 0 \quad I.S.=\{-3\} \end{cases}$

149 $\frac{a-1}{x+3}-\frac{a}{2-x}=\frac{ax+a^2}{x^2+x-6}$ $\quad \begin{cases} a=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-3,2\} \\ a=3\vee a=2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 1\wedge a\neq 3 \quad I.S.=\{-a\} \end{cases}$

150 $\frac{a+1}{x+1}-\frac{2a}{x-2}=\frac{3-5a}{x^2-x-2}$ $\quad \begin{cases} a=1\vee a=-3\vee a=3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -3\wedge a\neq 1\wedge a\neq 3 \quad I.S.=\left\{\frac{5-a}{1-a}\right\} \end{cases}$

151 $\frac{x-a}{x^2-1}-\frac{x+3a}{2x-x^2-1}=\frac{x+5}{x+1}-\frac{2x}{(x-1)^2}-1$ $\quad \begin{cases} a=1\vee a=-5\vee a=-1\vee a=7 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -5\wedge a\neq -1\wedge a\neq 7 \quad I.S.=\left\{\frac{2(a-1)}{a+5}\right\} \end{cases}$

152 $\frac{3}{1+3x}+\frac{a}{3x-1}=\frac{a-5x}{1-9x^2}$ $\quad \begin{cases} a=-\frac{4}{3}\vee a=\frac{5}{9}\vee a=\frac{13}{3} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -\frac{4}{3}\wedge a\neq\frac{5}{9}\wedge a\neq\frac{13}{3} \quad I.S.=\left\{\frac{3-2a}{4+3a}\right\} \end{cases}$

153 $\frac{2a}{x^2-x-2}+\frac{1}{3x^2+2x-1}=\frac{6a^2-13a-4}{3x^3-4x^2-5x+2}$ $\quad \begin{cases} a=-\frac{1}{6} \quad I.S.=\mathbb{R}-\left\{-1,2,\frac{1}{3}\right\} \\ a=\frac{7}{3}\vee a=4\vee a=1 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -\frac{1}{6}\wedge a\neq\frac{7}{3}\wedge a\neq 4\wedge a\neq 1 \quad I.S.=\{a-2\} \end{cases}$

154 $\frac{a}{x}=\frac{1}{a}$ $\quad \begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a\neq 0 \quad I.S.=\{a^2\} \end{cases}$

155 $\frac{a}{x+a}=1+a$ $\quad \begin{cases} a=-1\vee a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -1\wedge a\neq 0 \quad I.S.=\left\{-\frac{a^2}{1+a}\right\} \end{cases}$

156 $\frac{x}{x-a}+\frac{1}{x+a}=1$ $\quad \begin{cases} a=-1\vee a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -1\wedge a\neq 0 \quad I.S.=\left\{-\frac{a(a-1)}{a+1}\right\} \end{cases}$

157 $\frac{x+a}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}$ $\quad \begin{cases} a=0 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{0\} \\ a\neq 0 \quad I.S.=\{0\} \end{cases}$

158 $\frac{2}{1-ax}+\frac{1}{2+ax}=0$ $\quad \begin{cases} a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \quad I.S.=\left\{-\frac{5}{a}\right\} \end{cases}$

159 $\frac{2}{x-2}+\frac{a+1}{a-1}=0$ $\quad \begin{cases} a=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-1 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 1\wedge a\neq -1 \quad I.S.=\left\{\frac{4}{a+1}\right\} \end{cases}$

160 $\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t+1}=\frac{tx}{tx+x+t^2+t}$ $\begin{cases} t=-1 \text{ equazione priva di significato} \\ t^2+t-1=0 \quad I.S.=\emptyset \\ t^2+t-1\neq 0 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{t+1}\right\} \end{cases}$

161 $\frac{tx}{x-2}+\frac{t^2}{t+1}-\frac{t}{x-2}=0$ $\begin{cases} t=-1 \text{ equaz. priva di significato} \\ t=0 \quad I.S.\ \mathbb{R}-\{2\} \\ t=-\frac{1}{2}\vee t=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq -3,-\frac{1}{2},-1,0 \quad I.S.=\left\{\frac{3t+1}{2t+1}\right\} \end{cases}$

162 $\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2a-1}{a+1}$ $\begin{cases} a=-1 \quad \textit{equaz. priva di sign.} \\ a=2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -1\wedge a\neq 2 \quad I.S.=\left\{\frac{3a}{2(a-2)}\right\} \end{cases}$

163 $\frac{x}{2a}+\frac{x+1}{1-2a}=\frac{1}{a}$

164 $\frac{a}{x+1}=\frac{3}{x-2}$

165 $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{bx}{1-x^2}+\frac{a+2x^2}{x^2-1}$

166 $\frac{2x+1}{x}+\frac{2x^2-3b^2}{bx-x^2}=\frac{1}{x-b}$

167 $\frac{x-1}{x+a}=2+\frac{1-x}{x-a}$

►4. Equazioni letterali e formule inverse

Le formule di geometria, di matematica finanziaria e di fisica possono essere viste come equazioni letterali. I due principi di equivalenza delle equazioni permettono di ricavare le cosiddette formule inverse, ossia di risolvere un'equazione letterale rispetto a una delle qualsiasi lettere incognite che vi compaiono.

Esempi

- Area del triangolo $A=\frac{b\cdot h}{2}$

Questa equazione è stata risolto rispetto all'incognita A, ossia se sono note le misure della base b e dell'altezza h è possibile ottenere il valore dell'area A.
E' possibile risolvere l'equazione rispetto a un'altra lettera pensata come incognita.
Note le misure di A e di B ricaviamo h. Per il primo principio di equivalenza moltiplichiamo per 2 entrambi i membri dell'equazione $A=\frac{b\cdot h}{2}\rightarrow 2\mathrm{A}=b\cdot h$ dividiamo per b entrambi i membri $\frac{2\mathrm{A}}{b}=h$, ora basta invertire primo e secondo membro:
$h=\frac{2\mathrm{A}}{b}$.

- Formula del montante $M=C(1+it)$

Depositando un capitale C viene depositato per un periodo di tempo t in anni, al quale è applicato un tasso di interesse annuo i, si ha diritto al montante M.
Risolviamo l'equazione rispetto al tasso di interesse i, ossia supponiamo di conoscere il capitale depositato C, il montante M ricevuto alla fine del periodo t e ricaviamo il tasso di interesse che ci è stato applicato.
Partendo da $M=C(1+it)$, dividiamo primo e secondo membro per C, otteniamo $\frac{M}{C}=1+it$; sottraiamo 1 al primo e al secondo membro, otteniamo $\frac{M}{C}-1=it$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $i=\frac{\left(\frac{M}{C}-1\right)}{t}$ che possiamo riscrivere come $i=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{M}{C}-1\right)$ oppure $i=\frac{M-C}{t\cdot C}$.

- Formula del moto rettilineo uniforme $s=s_0+v\cdot t$

Un corpo in una posizione s_0, viaggiando alla velocità costante v, raggiunge dopo un intervallo di tempo t la posizione s.
Calcoliamo v supponendo note le altre misure.
Partendo dalla formula $s=s_0+v\cdot t$ sottraiamo ad ambo i membri s_0, otteniamo $s-s_0=v\cdot t$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $\frac{s-s_0}{t}=v$.

Ricava le formule inverse richieste

168 Interesse I maturato da un capitale C, al tasso di interesse annuo i, per un numero di anni t:

$$\boxed{I=C\cdot i\cdot t}$$

Ricava le formule per calcolare C = … … i = … … t = … …

Se il capitale è 12.000 €, il tasso di interesse 3,5%, il tempo è di 6 anni, calcola I.

169 Conversione da gradi Celsius C a gradi Fahrenheit F

$$\boxed{C=\frac{5(F-32)}{9}}$$

Ricava la formula per calcolare F = …

Calcola il valore di C quando F vale 106.

Calcola il valore di F quando C vale 12.

170 Valore attuale Va di una rendita che vale Vn dopo n anni, anticipata di t anni al tasso di interesse i:

$$\boxed{V_a=V_n\cdot(1-i\cdot t)}$$

Ricava le formule per calcolare V_n = … … i = … … t = … …

Se il valore attuale è 120.000€, il tasso di interesse il 2%, calcola il valore della rendita dopo 20 anni.

171 Sconto semplice S , per un montante M, al tasso di interesse i, per un tempo t in anni:

$$\boxed{S=\frac{M\cdot i\cdot t}{1+i\cdot t}}$$

Ricava le formule per calcolare M = … … i = … …

Se lo sconto semplice è 12.000€, il tempo è 12 anni, il tasso di interesse il 4,5%, calcola il montante.

172 Superficie S di un trapezio di base maggiore B, base minore b, altezza h:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\cdot(B+b)\cdot h}$$

Ricava le formule per calcolare B = … … b = … … h = … …

Se la base maggiore è 12cm, la base minore 8cm, la superficie 12cm^2, calcola l'altezza del trapezio.

173 Superficie laterale Sl di un tronco di piramide con perimetro della base maggiore 2p, perimetro della base minore 2p', apotema a (attenzione 2p e 2p' sono da considerare come un'unica incognita):

$$\boxed{S_l=\frac{(2\mathrm{p}+2\mathrm{p}')\cdot a}{2}}$$

Ricava le formule per calcolare 2p = … … 2p' = … … a = … …

Se la superficie laterale vale 144cm^2, il perimetro della base minore 12cm e il perimetro della base maggiore 14cm, calcola l'apotema.

174 Volume V del segmento sferico a una base di raggio r e altezza h.

$$\boxed{V=\pi\cdot h^2\cdot\left(r-\frac{h}{3}\right)}$$

Ricava la formula per calcolare r = … …

Se il volume misura 200cm^3 e l'altezza 10cm, calcola la misura del raggio.

175 Superficie totale S del cono di raggio di base r e apotema a.

$$\boxed{S=\pi\cdot r\cdot(r+a)}$$

Ricava la formula per calcolare a = … …

Se la superficie totale è 98cm^2 e il raggio 6cm, calcola la misura dell'apotema

176 Velocità v nel moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v0, accelarazione costante a dopo un tempo t

$$\boxed{v=v_0+a\cdot t}$$

Ricava le formule per calolare v_0 = … … a = … … t = … …

Se un corpo è passato in 10 secondi dalla velocità 10m/s alla velocità 24m/s qual è stata la sua ccelezione?

177 Spazio percorso s nel moto rettilineo uniformemente accelerato in un intervallo di tempo t, per un corpo che ha posizione iniziale s0, velocità iniziale v0 e accelerazione a:

$$\boxed{s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2}$$

Ricava le formule per calcolare $v_0=\dots\dots$ $a=\dots\dots$

Se un corpo ha percorso 100m, partendo dalla posizione iniziale 0, accelerazione $3m/s^2$, in 10 secondi, qual era la sua velocità iniziale?

178 Formula di Bernoulli relativa al moto di un fluido:

$$\boxed{p+\rho\cdot g\cdot h+\frac{1}{2}\rho\cdot v^2=k}$$

Ricava le formule per calcolare $h=\dots\dots$ $\rho=\dots\dots$

179 Legge di Gay-Lussac per i gas:

$$\boxed{V=V_0\cdot(1+\alpha\cdot t)}$$

Ricava le formule per calcolare $V_0=\dots\dots$ $t=\dots\dots$

180 Equazione di stato dei gas perfetti:

$$\boxed{pV=nRT}$$

Ricava le formule per calcolare $V=\dots\dots$ $T=\dots\dots$

181 Rendimento del ciclo di Carnot :

$$\boxed{\eta=1-\frac{T_1}{T_2}}$$

Ricava le formule per calcolare $T_1=\dots\dots$ $T_2=\dots\dots$

182 Legge di Stevino

$$\boxed{P_B=P_A+\rho\cdot g\cdot(z_A-z_B)}$$

Ricava le formule per calcolare $\rho=\dots\dots$ $z_A=\dots\dots$ $z_B=\dots\dots$

Risolvi le seguenti equazioni rispetto alla lettera richiesta:

183 $y=\frac{2-a}{x}$ $x=\dots\dots$ $a=\dots\dots$

184 $y=2-\frac{a}{x}$ $x=\dots\dots$ $a=\dots\dots$

185 $y=\frac{2}{x}-a$ $x=\dots\dots$ $a=\dots\dots$

186 $y=-\frac{2-a}{x}$ $x=\dots\dots$ $a=\dots\dots$

187 $(m-1)x=m-3$ $m=\dots\dots$

188 $\frac{2}{x+2}+\frac{a-1}{a+1}=0$ $a=\dots\dots$

189 $(a+1)(b-1)x=0$ $b=\dots\dots$

190 $\frac{x}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{b}{a^2-b^2}$ risolvi rispetto all'incognita *a* e poi rispetto a *x*

$$R.\left[a=\frac{b(b+1)}{2x-b};\ \ x=\frac{b(a+b+1)}{2a}\right]$$

191 $\frac{2x}{a+b}+\frac{bx}{a^2-b^2}-\frac{1}{a-b}=0$ risolvi rispetto ad *a* e poi rispetto a b

$$R.\left[a=\frac{b(x+1)}{2x-1};b=\frac{a(2x-1)}{x+1}\right]$$

►5. Intervalli sulla retta reale

DEFINIZIONE.
Dati due numeri reali a e b, con a < b, si chiamano **intervalli**, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ intervallo limitato aperto, a e b sono esclusi;

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ intervallo limitato chiuso, a e b sono inclusi;

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra, a è incluso, b è escluso;

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra, a è escluso, b è incluso;

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$ intervallo superiormente illimitato aperto, a è escluso;

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$ intervallo superiormente illimitato chiuso, a è incluso;

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$ intervallo inferiormente illimitato aperto, a è escluso;

$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$ intervallo inferiormente illimitato chiuso, a è escluso.

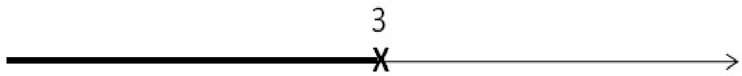
I numeri a e b si chiamano **estremi** dell'intervallo.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: ogni numero reale ha per immagine un punto della retta e viceversa ogni punto della retta è immagine di un numero reale. Di conseguenza ognuno degli intervalli sopra definiti ha per immagine una semiretta o un segmento, precisamente gli intervalli limitati corrispondono a segmenti e quelli illimitati a semirette. Vediamo con degli esempi come si rappresentano i diversi tipi di intervalli.

Esempi

- $H=\{x\in\mathbb{R} \mid x<3\}$ intervallo illimitato inferiormente $H=(-\infty,3)$

L'insieme H è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il punto immagine del numero 3, esclusa l'origine della semiretta. Nella figura, la semiretta dei punti che appartengono ad H è stata disegnata con una linea più spessa; per mettere in evidenza che il punto immagine di 3 non appartiene alla semiretta abbiamo messo una crocetta sul punto.



- $P=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq -5\}$ intervallo illimitato superiormente chiuso a sinistra $H=[-5,+\infty)$

Segniamo sulla retta r il punto immagine di -5; l'insieme P è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono -5, compreso lo stesso -5. Nel disegno, la semiretta dei punti che appartengono a P è stata disegnata con una linea più spessa, per indicare che il punto -5 appartiene all'intervallo abbiamo messo un pallino pieno sul punto.

- $D=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<6\}$ intervallo limitato aperto $D=(-2,6)$

Segniamo sulla retta reale i punti immagine degli estremi del segmento, -2 e 6. L'insieme D è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti. Nel disegno il segmento è stato disegnato con una linea più spessa, i due estremi del segmento sono esclusi, pertanto su ciascuno di essi abbiamo messo una crocetta.

- $T=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x\leq 6\}$ intervallo limitato chiuso a destra $T=(-2,6]$.

Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'insieme T è chiuso a destra, ossia è incluso nell'intervallo anche il 6, è escluso invece il punto -2.

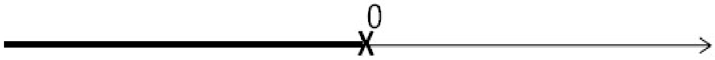
- $S=\{x\in\mathbb{R} \mid -2\leq x\leq 6\}$ intervallo chiuso e limitato $S=[2,6]$

Il segmento che rappresenta l'insieme S contiene tutti e due i suoi estremi:

Altri particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono

- $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri positi:

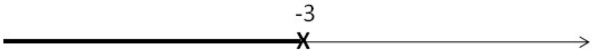
- $\mathbb{R}^{-}=\{x\in\mathbb{R} \mid x<0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri reali negativi



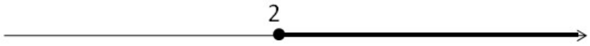
Il punto 0 non appartiene a nessuna delle due semirette; il numero zero non appartiene né a $\mathbb{R}^{+}$ né a $\mathbb{R}^{-}$
$\mathbb{R}=\mathbb{R}^{+}\cup\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}$.

- $\mathbb{R}_0^{+}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$
- $\mathbb{R}_0^{-}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 0\}$

Per ciascuno dei seguenti grafici determina la scrittura corretta

192 

[A] $x<-3$ [B] $x>-3$ [C] $x\leq -3$ [D] $x\leq -3$

193 

[A] $x<2$ [B] $x>2$ [C] $x\leq 2$ [D] $x\leq 2$

194 

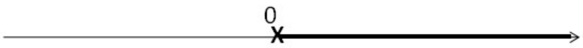
[A] $x<+2$ [B] $x>-2$ [C] $-2\leq x\leq 2$ [D] $-2<x<2$

195 

[A] $x<5\,;x>3$ [B] $3>x\geq 5$ [C] $3\leq x<5$ [D] $3<x\leq 5$

196 

[A] $\mathbb{R}^{-}-\{-1\}$ [B] $-1\geq x\geq 0$ [C] $-1\leq x\leq 0$ [D] $0<x<-1$

197 

[A] $x>0$ [B] $x>-\infty$ [C] $x\leq 0$ [D] $0<x\leq 0$

198 

[A] $x\geq 1\,;x<2$ [B] $1\leq x<2$ [C] $x\leq 1\,e\,x>2$ [D] $2\geq 1$

►6. Disequazioni numeriche

Consideriamo le seguenti proposizioni:

A) 5 è minore di 12
B) 48-90 è maggiore di 30
C) il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero
D) sommando ad un numero la sua metà si ottiene un numero minore o uguale a 1

esse possono essere tradotte in linguaggio matematico usando i simboli > (maggiore) , < (minore) , ≥ (maggiore o uguale) ; ≤ (minore o uguale) e precisamente :

A) $5<12$ B) $48-90>30$ C) $x^2\geq 0$ D) $x+\frac{1}{2}x\leq 1$

Le formule che contengono variabili si dicono aperte; quelle che contengono solo numeri si dicono chiuse. Quindi A) e B) sono formule chiuse; C) e D) sono formule aperte.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disuguaglianza** una formula chiusa costruita con uno dei predicati < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Di essa sappiamo subito stabilire il valore di verità, quando è stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disequazione** una formula aperta, definita in R e costruita con uno dei seguenti predicati: < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Analogamente a quanto detto per le equazioni, chiamiamo **incognite** le variabili che compaiono nella disequazione, **primo membro** e **secondo membro** le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza.

Esempi

- In N, la formula $5>0$ è una disuguaglianza VERA
- In Z, la formula $-6>-4$ è una disuguaglianza FALSA
- La formula $5x>0$ è una disequazione; quando all'incognita sostituiamo un numero essa si trasforma in una disuguaglianza e solo allora possiamo stabilirne il valore di verità. Nel caso proposto è VERA se sostituiamo alla variabile un qualunque numero positivo, FALSA se sostituiamo zero o un numero negativo.

199 Completa la seguente tabella indicando con una crocetta il tipo di disuguaglianza o disequazione:

Proposizione	Disuguaglianza		Disequazione
	VERA	FALSA	
Il doppio di un numero reale è minore del suo triplo aumentato di 1			
La somma del quadrato di 4 con 3 è maggiore della somma del quadrato di 3 con 4			
Il quadrato della somma di 4 con 3 è minore o uguale a 49			
In $\mathbb{Z}:(5+8)-(2)^4>0$			
$-x^2>0$			
$(x+6)^2\cdot(1-9)\cdot(x+3-9)<0$			

DEFINIZIONE. L'insieme dei valori che sostituiti all'incognita trasformano la disequazione in una disuguaglianza vera, è l'**insieme soluzione (I.S.)** della disequazione.

►7. Ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione

Alcune volte l'I.S. si può semplicemente trovare ragionando sulla forma della disequazione.

Esempi

Analizziamo le seguenti disequazioni in R:

- $3\cdot x\geq 0$ si cercano quei valori da attribuire all'incognita che moltiplicati per 3 diano un prodotto positivo o nullo. Per le regole dei segni e per la legge di annullamento del prodotto, il numero x deve essere maggiore o uguale a 0: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.
- $x^2+1<0$ si cercano i valori che rendono la somma del loro quadrato con 1 un numero negativo. Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, al più nullo se il numero è zero, aggiungendo ad esso 1, non troveremo mai un risultato negativo: $I.S.=\emptyset$.
- $-x^2\leq 0$ il primo membro è l'opposto del quadrato di un numero; poiché il quadrato è sempre positivo o nullo, la disequazione è verificata per qualunque numero reale: $I.S.=\mathbb{R}$.
- $\frac{1}{x}<0$ il primo membro è l'inverso di un numero reale; tale operazione ha significato per qualunque numero tranne che per 0, $\frac{1}{0}$ infatti è priva di significato. La frazione $\frac{1}{x}$ è negativa per qualunque valore negativo attribuito alla incognita: $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<0\}=\mathbb{R}^-$.

In questo paragrafo affronteremo disequazioni in una sola incognita, che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, avrà l'incognita al primo grado e i cui coefficienti sono numeri reali.
La forma più semplice o **forma canonica** di una disequazione di primo grado in una sola incognita a coefficienti reali è una delle seguenti $ax>b$; $ax<b$; $ax\geq b$; $ax\leq b$ con a e b numeri reali.
Per condurre una disequazione alla forma canonica e quindi per determinare il suo I.S. si procede applicando dei principi analoghi a quelli delle equazioni.
Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

PRIMO PRINCIPIO. Addizionando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per qualunque valore attribuito all'incognita), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Regola pratica: questo principio ci permette di "spostare" un addendo da un membro all'altro cambiandogli segno o di "eliminare" da entrambi i membri gli addendi uguali.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero positivo o per una stessa espressione (definita e positiva per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

TERZO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero negativo o per una stessa espressione (definita e negativa per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data ma con il verso cambiato.

Esempi

- $4\cdot(2x-1)+5>1-2\cdot(-3x-6)$

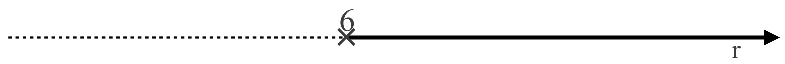
1° passo: eseguiamo i prodotti $8x-4+5>1+6x+12$

2° passo: spostiamo tutti termini con l’incognita nel primo membro e i termini noti nel secondo membro, cambiamo i segni quando passiamo da un membro all'altro: $8x-6x>1+12+4-5$

3° passo: sommando i termini simili si ottiene la forma canonica $2x>12$

4° passo: applichiamo il secondo principio dividendo ambo i membri per il coefficiente della x. E' Fondamentale a questo punto osservare che il coefficiente è 2, che è un numero positivo, pertanto non cambia il verso della disequazione $\frac{2}{2}x>\frac{12}{2} \rightarrow x>6$. Se viceversa il coefficiente dell'incognita fosse stato un numero negativo si sarebbe dovuto cambiare il verso della disequazione.

5° passo: scriviamo l'insieme delle soluzioni $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>6\}=(6,+\infty)$ e rappresentiamo graficamente l'intervallo



- $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}>\frac{(x-1)^2}{4}$

Il m.c.m. è 4 numero positivo, moltiplichiamo per 4 si ha $4\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}\right)>\frac{4\cdot(x-1)^2}{4}$

Semplificando $(x+1)^2-2\cdot(2+3x)>(x-1)^2$

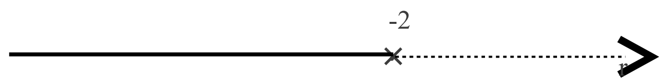
Eseguiamo i prodotti $x^2+2x+1-4-6x>x^2-2x+1$

Eliminiamo dai due membri i termini uguali x^2 e 1, trasportiamo a sinistra i monomi con l’incognita e a destra i termini noti; infine sommiamo i monomi simili:

$\cancel{x^2}+2x+1-4-6x>\cancel{x^2}-2x+1 \rightarrow 2x+2x-6x>+4 \rightarrow -2x>4$

Il coefficiente dell’incognita è negativo, applicando il terzo principio dividiamo ambo i membri per -2 e cambiamo il verso della disuguaglianza: $\frac{-2}{-2}x<\frac{4}{-2} \rightarrow x<-2$

$I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2\}=(-\infty,-2)$



Giunti alla forma $-2x>4$ potevano trasportare a destra del segno di disuguaglianza il monomio con l’incognita e a sinistra mettere il termine noto; ovviamente per il primo principio spostando questi termini cambiano segno e otteniamo $-4>2x$. Il coefficiente dell’incognita è positivo dunque applichiamo il secondo principio dividendo per 2, abbiamo $\frac{-4}{2}>\frac{2}{2}x \rightarrow -2>x$, che letta da destra a sinistra dice che i valori da attribuire ad x per soddisfare la disequazione assegnata sono tutti i numeri reali minori di -2.

Vediamo qualche esempio in cui scompare l’incognita

- $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Il m.c.m. è 2, positivo; moltiplichiamo ambo i membri per 2; svolgiamo i calcoli:

$2\cdot\left(\frac{1}{2}(x+5)-x\right)>2\cdot\left(\frac{1}{2}(3-x)\right) \rightarrow x+5-2x>3-x \rightarrow -x+5>3-x$

La forma canonica è $0\cdot x>-2$ che si riduce alla disuguaglianza $0>-2$ vera per qualunque x reale: $I.S.=\mathbb{R}$

- $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Svolgiamo i calcoli ed eliminiamo i monomi simili: $x^2+4x+4-4x-4<x^2-1 \rightarrow 0\cdot x<-1$

che è la disuguaglianza $0<-1$ falsa per qualunque x reale: $I.S.=\emptyset$

200 Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$x-2>0 \quad x+5>0 \quad x-4>0 \quad x-5\geq 0 \quad x+3\leq 0 \quad x>0 \quad x\geq 0 \quad -1\leq x \quad 3>x$

Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

201 $3-x>x$ $\quad I.S.=\left\{x<\frac{3}{2}\right\}$ $\qquad 2x>3$ $\quad I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$

202 $3x\leq 4$ $\quad I.S.=\left\{x\leq\frac{4}{3}\right\}$ $\qquad 5x\geq -4$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{4}{5}\right\}$

203 $x^2+x^4+10>0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$ $\qquad x^2+x^4+100<0$ $\quad I.S.=\emptyset$

204 $-x+3>0$ $\quad I.S.=\{x<3\}$ $\qquad -x-3\leq 0$ $\quad I.S.=\{x\geq -3\}$

205 $3+2x\geq 3x+2$ $\quad I.S.=\{x\leq 1\}$ $\qquad 5x-4\geq 6x-4$ $\quad I.S.=\{x\leq 0\}$

206 $-3x+2\geq -x-8$ $\quad I.S.=\{x\leq 5\}$ $\qquad 4x+4\geq 2(2x+8)$ $\quad I.S.=\emptyset$

207 $4x+4\geq 2(2x+1)$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$ $\qquad 4x+4\geq 2(2x+2)$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

208 $4x+4<2(2x+3)$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\qquad 4x+4>2(2x+2)$ $\quad I.S.=\emptyset$

209 $4x+4<2(2x+2)$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\qquad x^2+4>3$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

210 $x^2+3<-1$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\qquad 4x+4\geq 3\left(x+\frac{4}{3}\right)$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

211 $-3x>0$ $\quad I.S.=\{x<0\}$ $\qquad -3x\leq 0$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

212 $-3x+5\geq 0$ $\quad I.S.=\left\{x\leq\frac{5}{3}\right\}$ $\qquad -3x-8\geq 0$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{8}{3}\right\}$

213 $-3x-8\geq 2$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{10}{3}\right\}$ $\qquad -\frac{4}{3}x\geq 1$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{3}{4}\right\}$

214 $-\frac{4}{3}x\geq 0$ $\quad I.S.=\{x\leq 0\}$ $\qquad -\frac{4}{3}x\geq\frac{2}{3}$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{1}{2}\right\}$

215 $-\frac{2}{3}x\leq\frac{1}{9}$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{1}{6}\right\}$ $\qquad -\frac{2}{3}x\leq 9$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{27}{2}\right\}$

216 $\frac{x+5}{2}>-\frac{1}{5}$ $\quad x>-\frac{27}{5}$ $\qquad \frac{1}{2}-\left(\frac{x}{2}-5\right)^2\leq\frac{(x-3)^2}{4}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

217 $x+\frac{1}{2}<\frac{(x+3)}{3}-1$ $\quad I.S.=\left\{x<-\frac{3}{4}\right\}$ $\qquad \frac{(x+5)}{3}+3+2\frac{(x-1)}{3}\leq x+4$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

218 $(x+3)^2\geq(x-2)(x+2)$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{13}{6}\right\}$ $\qquad \frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)$ $\quad I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$

219 $1-(2x-4)^2>-x\cdot(4x+1)+2$ $\quad I.S.=\{x>1\}$ $\qquad (x+1)^2\geq(x-1)^2$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

220 $\frac{3}{2}\cdot(x+1)-\frac{1}{3}\cdot(1-x)<x+2$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<1\}=(-\infty,1)$

221 $\frac{x+0{,}25}{2}<1{,}75+0{,}25x$ $\quad I.S.=\left\{x<\frac{13}{2}\right\}$

222 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\geq 0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

223 $3\frac{(x+1)}{2}-\frac{x+1}{3}-\frac{1}{9}>-5x+\frac{1}{2}$ $\quad I.S.=\left\{x>-\frac{10}{111}\right\}$

224 $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)+x-\frac{1}{2}>x\frac{(x-1)}{4}+\frac{5x-6}{4}$ $\quad I.S.=\emptyset$

225 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)>\frac{x-\frac{1}{2}}{3}+\frac{x-\frac{1}{3}}{2}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

►8. Problemi con le disequazioni

Problema

Tariffe telefoniche

Sto analizzando due proposte di compagnie telefoniche per poi stipulare il contratto più conveniente per le mie esigenze. La compagnia T_1 prevede una spesa fissa di 5 centesimi di scatto alla risposta da sommare alla spesa di 1 centesimo per ogni minuto di telefonata. La compagnia T_2 non prevede spesa per lo scatto alla risposta, ma per ogni minuto di telefonata la spesa è di 2 centesimi. Dopo quanti minuti di telefonata la seconda tariffa è più conveniente della prima?

Indichiamo con x la durata in minuti di una telefonata e con t_1 e t_2 rispettivamente la spesa con la prima e la seconda compagnia:

$t_1=(5+1\cdot x)$ centesimi $\qquad$ $t_2=(2\cdot x)$ centesimi

t_2 sarà più conveniente di t_1 se $2\cdot x<5+x$

Il problema è formalizzato con una disequazione nell'incognita x, di primo grado. Dobbiamo trovare I.S.

Applicando il primo principio si ottiene: $2\cdot x-x<5 \;\rightarrow\; x<5\ (min)$

Conclusione: se le mie telefonate durano meno di 5 minuti allora mi conviene il contratto con T_2 , altrimenti se faccio telefonate più lunghe di 5 minuti mi conviene T_1 . Le due tariffe sono uguali se la telefonata dura esattamente 5 minuti.

Problema

L'abbonamento

Su un tragitto ferroviario, il biglietto costa 8,25 euro. L'abbonamento mensile costa 67,30 euro. Qual è il numero minimo di viaggi che occorre effettuare in un mese perché l'abbonamento sia più conveniente?

Indichiamo con x il numero di viaggi. Il costo del biglietto di x viaggi è $8{,}25\cdot x$. L'abbonamento è più conveniente quando $8{,}25\cdot x>67{,}30$ da cui $x>\frac{67{,}30}{8{,}25}$ e quindi x>8,16. In conclusione se si fanno 8 viaggi in un mese conviene acquistare i biglietti singoli, da 9 viaggi in poi conviene l'abbonamento.

Risolvi i seguenti problemi con una disequazione

226 Sommando un numero con il doppio del suo successivo si deve ottenere un numero maggiore di 17. Quali numeri verificano questa condizione [x>5]

227 Sommando due numeri pari consecutivi si deve ottenere un numero che non supera la metà del numero più grande. Quali valori può assumere il primo numero pari? $[x \leq -2/3]$

228 Il noleggio di una automobile costa 55,00 € al giorno, più 0,085 € per ogni chilometro percorso. Qual è il massimo di chilometri da percorrere giornalmente, per spendere non più di 80,00 € al giorno? [massimo 294 km]

229 In una fabbrica, per produrre una certa merce, si ha una spesa fissa settimanale di 413 €, ed un costo di produzione di 2,00 € per ogni kg di merce. Sapendo che la merce viene venduta a 4,00 € al kg, determinare la quantità minima da produrre alla settimana perché l'impresa non sia in perdita.

230 Per telefonare in alcuni paesi esteri, una compagnia telefonica propone due alternative di contratto:
a) 1,20 € per il primo minuto di conversazione, 0,90 € per ogni minuto successivo;
b) 1,00 € per ogni minuto di conversazione.
Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la seconda alternativa? [meno di 3 minuti]

231 Il prezzo di un abbonamento mensile ferroviario è di 125,00 €. Sapendo che il prezzo di un singolo biglietto sulla stessa tratta è di 9,50 €, trovare il numero minimo di viaggi per cui l'abbonamento mensile risulta conveniente, e rappresentare graficamente la soluzione. [14]

232 Al circolo tennis i soci pagano 12 € a ora di gioco, i non soci pagano 15€. Sapendo che la tessera annuale costa 150€, dopo quante partite all'anno conviene fare la tessera di socio?

233 In montagna l'abbonamento per due settimane allo skipass costa 220€ mentre il biglietto giornaliero costa 20€. Andando a sciare ogni giorno, dopo quanti giorni conviene fare l'abbonamento? [x>11]

234 Marco ha preso alle prime tre prove di matematica i seguenti voti: 5; 5,5; 4,5. Quanto deve prendere alla quarta e ultima prova per avere 6 di media? [9]

235 Per produrre un tipo di frullatore un'azienda ha dei costi fissi per 12.000€ a settimana e riesce a pro-durre 850 frullatori a settimana, ognuno dei quali ha un costo di produzione pari a 34€. L'azienda concor-rente riesce a vendere un frullatore analogo a 79€. A quanto devono essere venduti i frullatori in modo che l'azienda abbia un utile e che il prezzo di vendita non sia superiore a quello del prodotto concorrente?

236 Per noleggiare un'auto una compagnia propone un'auto di tipo citycar al costo di 0,20 € per km per-corso e una quota fissa giornaliera di 15,00 €, un'auto di tipo economy al costo di 0,15 € per km e una quota fissa giornaliera di 20,00€. Dovendo noleggiare l'auto per 3 giorni quanti km occorre fare perché sia più conveniente l'auto di tipo economy? [più di 300 km]

237 Alle 9.00 di mattina sono in autostrada e devo raggiungere una città che dista 740 km entro le 17.00 poiché ho un appuntamento di lavoro. Prevedendo una sosta di mezzora per mangiare un panino, a quale velocità devo viaggiare per arrivare in orario?

238 Quanto deve essere lungo il lato di un triangolo equilatero il cui perimetro deve superare di 900cm il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato di 10cm? [x>310cm]

239 I lati di un triangolo sono tali che il secondo è doppio del primo e il terzo è più lungo del secondo di 3cm. Se il perimetro deve essere compreso tra 10cm e 20cm, tra quali valori può variare il lato più piccolo? $\left[\frac{7}{5}cm < x < \frac{17}{5}cm\right]$

240 In un triangolo isoscele l'angolo alla base deve essere minore della metà dell'angolo al vertice. Tra quali valori deve essere compresa la misura dell'angolo alla base? $[0° < \alpha < 45°]$

241 Un trapezio rettangolo l'altezza che è il triplo della base minore, mentre la base maggiore è 5 volte la base minore. Se il perimetro del trapezio non deve superare i 100m, quali valori può assumere la lun-ghezza dell'altezza del trapezio? $\left[h \leq \frac{150}{7} m\right]$

242 Un rettangolo ha le dimensioni una doppia dell'altra. Si sa che il perimetro non deve superare 600m e che l'area non deve essere inferiore a 200m2. Tra quali valori possono variare le dimensioni del rettangolo? [Il lato minore tra 10m e 100m, il lato maggiore tra 20m e 200m]

►9. Sistemi di disequazioni

In alcune situazioni occorre risolvere contemporaneamente più disequazioni. Vediamo alcuni problemi.

Problema

Il doppio di un numero reale positivo diminuito di 1 non supera la sua metà aumentata di 2. Qual è il numero?

Incognita del problema è il numero reale che indichiamo con x. Di esso sappiamo che deve essere positivo, quindi $x>0$ e che deve verificare la condizione $2x-1\leq\frac{1}{2}x+2$. Le due disequazioni devono verificarsi contemporaneamente.

Il problema può essere formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}x>0\\2x-1\leq\frac{1}{2}x+2\end{cases}$.

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle due disequazioni, cioè che le verificano entrambe.

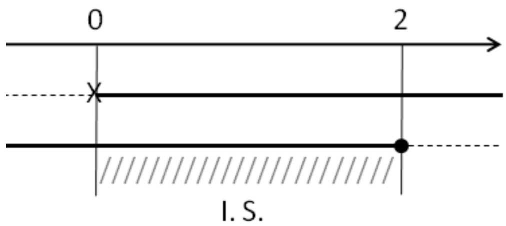
Se indichiamo con $I.S._1$ e $I.S._2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato dall'intersezione $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

Risolviamo separatamente le due disequazioni per determinare i due insiemi delle soluzioni.

D1: $x>0 \rightarrow I.S._1=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$

D2: $4x-2\leq x+4 \rightarrow 3x\leq 6 \rightarrow I.S._2=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 2\}$

Dobbiamo ora determinare $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

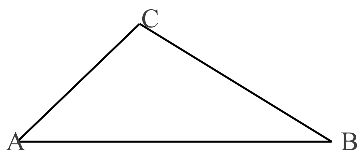


Questa ricerca può essere facilitata rappresentando graficamente i due intervalli in uno stesso schema. Disegniamo l'asse dei numeri reali r e su esso indichiamo i numeri che entrano in gioco, lo 0 e il 2. Disegniamo una prima linea dove rappresentiamo con una linea spessa $I.S._1$, disegniamo una seconda linea dove rappresentiamo con una linea più spessa I.S.2.

Su una terza linea rappresentiamo l'insieme degli elementi comuni a $I.S._1$ e $I.S._2$, che è appunto l' insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni. Non ci rimane che descrivere l'intervallo delle soluzioni in forma insiemistica $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x\leq 2\}=(0,2]$.

Problema

In un triangolo il lato maggiore misura 13m, gli altri due lati differiscono tra di loro di 2m. Come si deve scegliere il lato minore affinché il perimetro non superi 100m?



Dati: $\overline{AB}=13\text{m}$, $\overline{BC}-\overline{AC}=2\text{m}$

Riferendoci alla figura, AC è il lato minore; indichiamo con x la sua misura.

Obiettivo: determinare x in modo che $2p\leq 100$

Soluzione:

$\overline{AC}=x$; $\overline{BC}=2+x$; $\overline{AB}=13$ con $x>0$

L'obiettivo in linguaggio matematico si scrive: $x+(2+x)+13\leq 100$

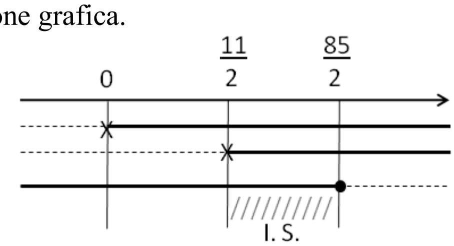
Per la "disuguaglianza triangolare" si deve avere $13<x+(2+x)$. Il problema è formalizzato dal sistema:

$$\begin{cases}x>0\\x+(x+2)+13\leq 100\\13<x+(x+2)\end{cases}$$ risolvendo ciascuna disequazione si ottiene $$\begin{cases}x>0\\x\leq\frac{85}{2}\\x>\frac{11}{2}\end{cases}$$;

determiniamo l'insieme soluzione aiutandoci con una rappresentazione grafica.

Risposta: affinché il perimetro non superi 100m la misura in metri del lato minore deve essere un numero dell'insieme

$$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{11}{2}<x\leq\frac{85}{2}\right\}$$



Risolviamo delle disequazioni più articolate nel calcolo algebrico.

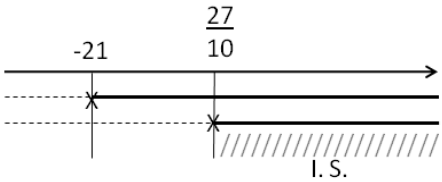
Esempi

- $\begin{cases} x > \frac{2x-11}{8} + \frac{19-2x}{4} \\ \frac{1}{5}(x+1) > \frac{x}{3} - \frac{15+2x}{9} \end{cases}$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$d_1: \ 8x > 2x - 11 + 38 - 4x \ \rightarrow \ 10x > 27 \ \rightarrow \ x > \frac{27}{10} \ \rightarrow \ I.S._1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{27}{10} \right\}$

$d_2: \ 9x + 9 > 15x - 75 - 10x \ \rightarrow \ 4x > -84 \ \rightarrow \ x > -21 \ \rightarrow \ I.S._2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > -21 \}$



Rappresentiamo graficamente le soluzioni e determiniamo
$I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$

$I.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{27}{10} \right\}$

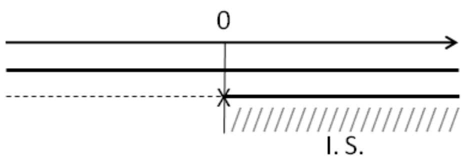
- $\begin{cases} 2 \cdot (x+1) + (-2)^2 \cdot x > 3 \cdot (2x-3) \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} < \frac{35}{16} \end{cases}$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$D_1: \ 2x + 2 + 4x > 6x - 9 \ \rightarrow \ 0x > -11 \ \rightarrow \ I.S._1 = \mathbb{R}$

$D_2: \ 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x - 35 < 0 \ \rightarrow \ -20x < 0 \ \rightarrow \ x > 0 \ \rightarrow \ I.S._2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

Determiniamo $I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$



$I.S. = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

- $\begin{cases} (x-2) \cdot (x+3) \geq x + (x-1) \cdot (x+1) \\ (x-1)^3 \leq x^2 \cdot (x-3) + 2\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \end{cases}$

Risolviamo separatamente le disequazioni: $D_1: \ x^2 - 2x + 3x - 6 > x + x^2 - 1 \ \rightarrow \ 0x \geq 5 \ \rightarrow \ I.S._1 = \emptyset$
Poiché la prima equazione non ha soluzioni non avrà soluzioni nemmeno il sistema. E' superfluo quindi risolvere la seconda disequazione. La risolviamo per esercizio.

$D_2: \ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq x^3 - 3x^2 - x + 2 \ \rightarrow \ 4x \leq 3 \ \rightarrow \ x \leq \frac{3}{4} \ \rightarrow \ I.S._2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{4} \right\}$

$I.S. = I.S._1 \cap I.S._2 = \emptyset \cap I.S._2 = \emptyset$

- $\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \leq \frac{1}{6} \\ x + 1 \leq \frac{2x-1}{3} + \frac{1-2x}{4} \end{cases}$

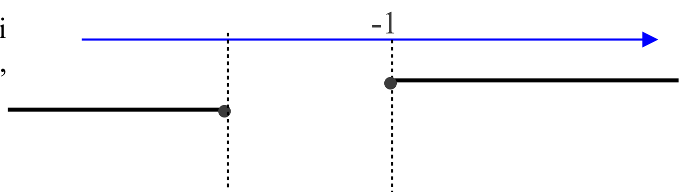
Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$D_1: \ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{6} \ \rightarrow \ 2x - 3x \leq 1 \ \rightarrow \ x \geq -1 \ \rightarrow \ I.S._1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \}$

$D_2: \ 12x + 12 \leq 8x - 4 + 3 - 6x \ \rightarrow \ 10x \leq -13 \ \rightarrow \ x \leq -\frac{13}{10} \ \rightarrow \ I.S._2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{13}{10} \right\}$

Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo $I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$.

Il grafico mette in evidenza che i due insiemi soluzione non hanno elementi in comune, pertanto $I.S. = \emptyset$



243 Sulla retta reale rappresenta l'insieme soluzione S_1 dell'equazione:
$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot(5x+3)=2+\frac{2}{3}\cdot(x+1)$ e l'insieme soluzione S_2 della disequazione:
$\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1-x}{4}\right)\geq 3-\frac{6-2x}{3}-\frac{x}{2}$. È vero che $S_1\subset S_2$?

244 Determina i numeri reali che verificano il sistema: $\begin{cases} x^2\leq 0 \\ 2-3x\geq 0 \end{cases}$ [x = 0]

245 L'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} (x+3)^3-(x+3)\cdot(9x-2)>x^3+27 \\ \frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}<x+1 \end{cases}$ è:

A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$ B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>-3\}$ C) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<-3\}$ D) $I.S.=\emptyset$ E) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\}$

246 Attribuire il valore di verità alle seguenti proposizioni

a) Il quadrato di un numero reale è sempre positivo V F

b) L'insieme complementare di $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-8\}$ *è* $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-8\}$ V F

c) Il monomio $-6x^3y^2$ assume valore positivo per tutte le coppie dell'insieme $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ V F

d) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi il sistema $\begin{cases} x+1>0 \\ 8x<0 \end{cases}$ non ha soluzione V F

e) L'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$ rappresenta l'I.S. del sistema $\begin{cases} 1+2x<0 \\ \frac{x+3}{2}\leq x+1 \end{cases}$ V F

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni

247 $\begin{cases}3-x>x\\2x>3\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}3x\le 4\\5x\ge -4\end{cases}$ $-\frac{4}{5}\le x\le\frac{4}{3}$

248 $\begin{cases}2x>3\\3x\le 4\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}3x-5<2\\x+7<-2x\end{cases}$ $x<-\frac{7}{3}$

249 $\begin{cases}3-x\ge x-3\\-x+3\ge 0\end{cases}$ $x\le 3$ $\begin{cases}-x-3\le 3\\3+2x\ge 3x+2\end{cases}$ $-6\le x\le 1$

250 $\begin{cases}2x-1>2x\\3x+3\le 3\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}2x+2<2x+3\\2(x+3)>2x+5\end{cases}$ $\mathbb{R}$

251 $\begin{cases}-3x>0\\-3x+5\ge 0\\-3x\ge -2x\end{cases}$ $x<0$ $\begin{cases}3+2x>3x+2\\5x-4\le 6x-4\\-3x+2\ge -x-8\end{cases}$ $0\le x<1$

252 $\begin{cases}-\frac{4}{3}x\ge\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}x\le\frac{1}{9}\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}4x+4\ge 3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)\\4x+4\ge 2\cdot(2x+2)\end{cases}$ $x\ge 0$

253 $\begin{cases}3(x-1)<2(x+1)\\x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2}>0\end{cases}$ $0<x<5$ $\begin{cases}x+\frac{1}{2}<\frac{1}{3}(x+3)-1\\(x+3)^2\ge(x-2)(x+2)\end{cases}$ $-\frac{13}{6}\le x<-\frac{3}{4}$

254 $\begin{cases}\frac{1}{2}-(x+5)^2\le\frac{(x-3)^2}{4}\\\frac{x+5}{3}+3+2\cdot\frac{x-1}{3}\le x+4\end{cases}$ $\mathbb{R}$ $\begin{cases}\frac{2x+3}{3}>x-1\\\frac{x-4}{5}<\frac{2x+1}{3}\end{cases}$ $-\frac{17}{7}<x<6$

255 $\begin{cases}2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x>3x-2\\\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\ge\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\end{cases}$ $x\ge 2$

256 $\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\\\frac{1}{2}\cdot\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\ge 0\end{cases}$ $x>\frac{3}{2}$

257 $\begin{cases}3\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{2-x}{3}+x-\frac{x-1}{3}>0\\\left[1-\frac{1}{6}(2x+1)\right]+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<(x+1)^2+\frac{1}{3}(1+2x)\end{cases}$ $x>\frac{9}{10}$

258 $\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\\2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)<\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}$ $x>\frac{1}{2}$

►10. Disequazioni polinomiali di grado superiore al primo

Problema

Vogliamo determinare i valori di x che rendono il polinomio $p=(3x-7)(2-x)$ positivo.
Il problema chiede di determinare l'insieme delle soluzione della disequazione di secondo grado $(3x-7)(2-x)>0$. La disequazione si presenta nella forma di prodotto di due fattori di primo grado e proprio la sua forma di prodotto ci faciliterà la risposta al quesito.
Sappiamo che nell'insieme dei numeri relativi il segno del prodotto di due fattori segue la regola dei segni visualizzata dalla tabella a lato: "il segno di un prodotto è positivo se i due fattori sono concordi". Questo fatto si traduce nei due metodi risolutivi del problema proposto.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Metodo 1: impostiamo due sistemi di disequazioni, formalizzando l'osservazione precedente

$$\begin{cases}3x-7>0\\2-x>0\end{cases}\vee\begin{cases}3x-7<0\\2-x<0\end{cases}$$

Risolvendo i due sistemi e unendo le loro soluzioni otteniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione originaria: $I.S.=I.S._1\cup I.S._2$

$$IS_1:\ \begin{cases}3x-7>0\\2-x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{7}{3}\\x<2\end{cases}\rightarrow IS_1=\emptyset\qquad IS_2:\ \begin{cases}3x-7<0\\2-x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<\dfrac{7}{3}\\x>2\end{cases}\rightarrow IS_2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$$

quindi $I.S.=I.S._1\cup I.S._2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$

Mediante il metodo appena esposto risolvi le seguenti disequazioni

259 $(x+3)\cdot\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\right)<0$ $\qquad$ $\left(-\frac{6}{11}+2x\right)\cdot\left(-x+\frac{9}{2}\right)$

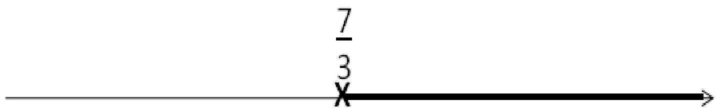
260 $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(5x+\frac{1}{5}\right)<0$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{10}x+2\right)\cdot(-3x+9)\geq 0$

Il metodo illustrato nel caso precedente si complica se il prodotto ha più di due fattori. Prova infatti ad applicarlo alla seguente disequazione

261 $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

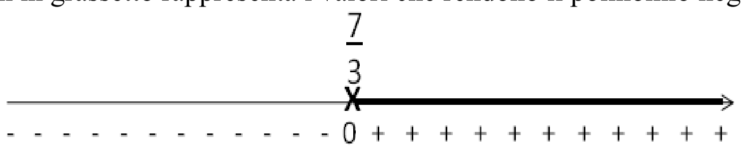
Metodo 2: Torniamo alla disequazione iniziale $(3x-7)(2-x)>0$ e applichiamo un altro metodo.
Osserviamo che quando risolviamo la disequazione $3x-7>0$ determiniamo l'insieme dei valori che attribuiti alla variabile rendono il polinomio $p=3x-7$ positivo, precisamente sono i valori $x>\frac{7}{3}$

Rappresentiamo l'I.S. con una semiretta in grassetto come in figura



In realtà, nel grafico sono contenute tutte le informazioni sul segno del polinomio:

- la semiretta in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio positivo;
- il valore x = 2 è quello che annulla il polinomio;
- la semiretta non in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio negativo.



Esempio

- $(3x-7)\cdot(2-x)>0$

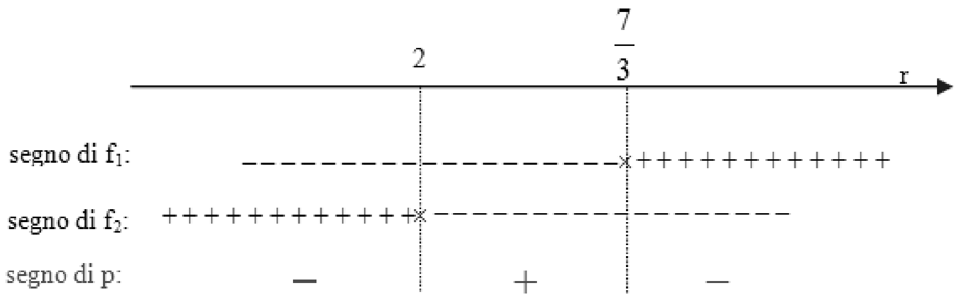
La disequazione equivale a determinare i valori che attribuiti alla variabile x rendono positivo il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.

Studiamo separatamente il segno dei due fattori:

F_1: $3x-7>0 \rightarrow x>\frac{7}{3}$

F_2: $2-x>0 \rightarrow x<2$

Per risolvere la disequazione iniziale ci è di particolare aiuto un grafico che sintetizzi la situazione.
Applicando poi la regola dei segni otteniamo il segno del polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.



Ricordiamo che la disequazione che stiamo risolvendo $(3x-7)\cdot(2-x)>0$ è verificata quando il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$ è positivo, cioè nell'intervallo in cui abbiamo ottenuto il segno "+".

Possiamo concludere $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$.

- $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

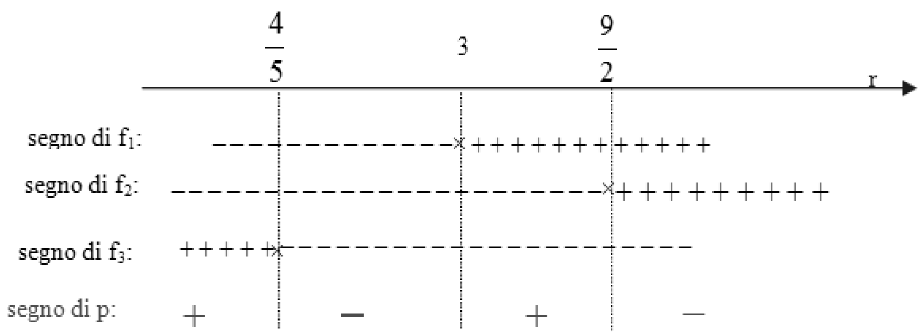
Determiniamo il segno di ciascuno dei suoi tre fattori:

$F_1: x-3>0 \rightarrow x>3$

$F_2: 2x-9>0 \rightarrow x>\frac{9}{2}$

$F_3: 4-5x>0 \rightarrow x<\frac{4}{5}$

Costruiamo la tabella dei segni:



La disequazione è verificata negli intervalli dove è presente il segno "+"

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{4}{5} \vee 3<x<\frac{9}{2}\right\}$.

Esempio

- $4x^3+4x^2 \leq 1+x$

La disequazione è di terzo grado; trasportiamo al primo membro tutti i monomi:

$4x^3+4x^2-1-x \leq 0$

Possiamo risolverla se riusciamo a scomporre in fattori di primo grado il polinomio al primo membro: ù

$4x^3+4x^2-1-x \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; 4x^2(x+1)-(x+1) \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; (x+1)(2x-1)(2x+1) \leq 0$

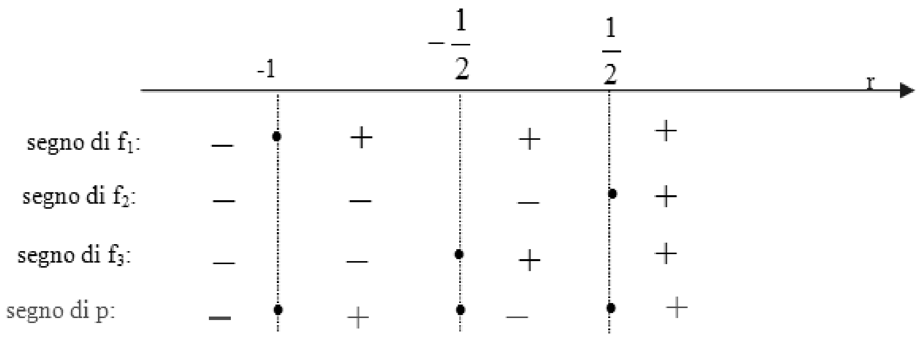
Studiamo ora il segno di ciascun fattore, tenendo conto che sono richiesti anche i valori che annullano ogni singolo fattore (legge di annullamento del prodotto):

$F_1 : x+1 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x \geq -1$

$F_2 : 2x-1 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x \geq \frac{1}{2}$

$F_3 : 2x+1 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x \geq -\frac{1}{2}$

Possiamo ora costruire la tabella dei segni



Ricordiamo che la disequazione di partenza $4x^3+4x^2 \leq 1+x$ è verificata dove compare il segno "-":

$I.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \;\; oppure \;\; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$

Procedura per determinare I.S. Di una disequazione polinomiale di grado superiore al primo
- scrivere la disequazione nella forma p≤0, p≥0, p<0, p>0;
- scomporre in fattori irriducibili il polinomio;
- determinare il segno di ciascun fattore, ponendolo sempre maggiore di zero, o maggiore uguale a zero a seconda della richiesta del problema;
- si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri del polinomio;
- si determinano gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto

Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

262 $(x+2)(3-x)\leq 0$ $\quad x\leq -2\vee x\geq 3$

263 $x(x-2)>0$ $\quad x<0\vee x>2$

264 $(3x+2)(2-3x)<0$ $\quad x<-\frac{2}{3}\vee x>\frac{2}{3}$

265 $-3x(2-x)(3-x)\geq 0$ $\quad x\geq 0\vee 2\leq x\leq 3$

266 $(x+1)(1-x)\left(\frac{1}{2}x-2\right)\geq 0$ $\quad x\leq 4$

267 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)<0$ $\quad 1<x<2\vee 3<x<4$

268 $x^2-16\leq 0$ $\quad -4\leq x\leq 4$

269 $4x^2-2x<0$ $\quad 0<x<\frac{1}{2}$

270 $x^4-81\geq 0$ $\quad x\leq -3\vee x\geq 3$

271 $x^2+17x+16\leq 0$ $\quad -16\leq x\leq -1$

272 $16-x^4\leq 0$ $\quad x\leq -2\vee x\geq 2$

273 $x^2+2x+1<0$ $\quad \emptyset$

274 $x^2+6x+9\geq 0$ $\quad \mathbb{R}$

275 $x^2-5x+6<0$ $\quad 2<x<3$

276 $x^2+3x-4\leq 0$ $\quad -4\leq x\leq 1$

277 $x^3>x^2$ $\quad x>1$

278 $x^2(2x^2-x)-(2x^2-x)<0$ $\quad -1<x<0\vee\frac{1}{2}<x<1$

279 $x^2-2x+1+x(x^2-2x+1)<0$ $\quad x<-1$

280 $x^3-2x^2-x+2\geq 0$ $\quad -1\leq x\leq 1\vee x\geq 2$

281 $x^4+4x^3+3x^2>0$ $\quad x<-3\vee x>-1\wedge x\neq 0$

282 $(6x^2-24x)(x^2-6x+9)<0$ $\quad 0<x<4\wedge x\neq 3$

283 $(x^3-8)(x+2)<(2-x)(x^3+8)$ $\quad -2<x<2$

284 $(2a+1)(a^4-2a^2+1)<0$ $\quad a<-\frac{1}{2}\wedge a\neq -1$

285 $x^3-6x^2+11>1-3x$ $\quad -1<x<2\vee x>5$

286 $x^6-x^2+x^5-6x^4-x+6<0$ $\quad -3<x<-1\vee 1<x<2$

287 Determinare i valori che attribuiti alla variabile y rendono positivi entrambi i polinomi seguenti

$p_1=y^4-13y^2+36;\quad p_2=y^3-y^2-4y+4\qquad -2<y<1\vee y>3$

288 Determinare i valori di a che rendono $p=a^2+1$ minore di 5. $-2<a<2$

Determina I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

289 $\begin{cases}x^2-9\geq 0\\ x^2-7x+10<0\end{cases}$ $\quad 3\leq x<5$ $\qquad \begin{cases}x^2+3x-12\geq 0\\ 12x^2+12x+3>0\end{cases}$ $\quad x\leq -6\vee x\geq 3$

290 $\begin{cases}49a^2-1\geq 0\\ 9a^2<1\\ 1-a>0\end{cases}$ $\quad -\frac{1}{3}<a\leq -\frac{1}{7}\vee\frac{1}{7}\leq a<\frac{1}{3}$

291 $\begin{cases}16x^4-1<0\\ 16x^3+8x^2\geq 0\end{cases}$ $\quad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

292 $\begin{cases}2x^2-13x+6<0\\ (2x^2-5x-3)(1-3x)>0\\ x^2+7>1\end{cases}$ $\quad -6<x<-\frac{1}{2}$

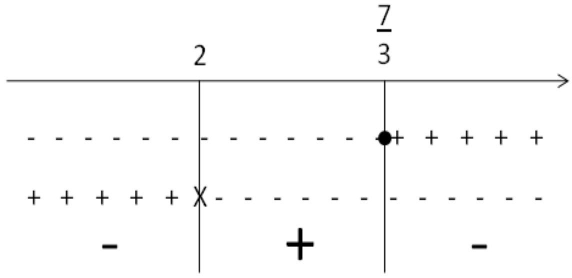
►11. Disequazioni frazionarie

Un’espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha come risultato una frazione algebrica. Con la condizione di esistenza che il denominatore della frazione sia diversa da zero la ricerca del segno di una frazione algebrica viene effettuata con la stessa procedura seguita per il prodotto di due o più fattori.

Esempio

■ $\frac{3x-7}{2-x}\geq 0$

Poniamo innanzi tutto la C.E. $2-x\neq 0$ cioè $\boldsymbol{x}\neq 2$ e procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore. Terremo conto della C.E. Ponendo il denominatore semplicemente maggiore di zero e non maggiore uguale.



$N\geq 0 \rightarrow 3x-7\geq 0 \rightarrow x\geq\frac{7}{3}$

$D>0 \rightarrow 2-x>0 \rightarrow x<2$

Analogamente a quanto fatto per il prodotto, dalla tabella dei segni otteniamo $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x\leq\frac{7}{3}\right\}$ in cui vediamo già compresa la C.E. che inizialmente avevamo posto.

Procedura per determinare I.S. di una disequazione frazionaria
- applicare il primo principio e trasportare tutti i termini al primo membro;
- eseguire i calcoli dell’espressione al primo membro per arrivare a una disequazione nella forma

$$\left[\frac{N(x)}{D(x)}>0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)}<0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)}\leq 0\right]$$

- studiare il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 (oppure N(x)≥0 a secondo della richiesta) e D(x)>0;
- costruire la tabella dei segni, segnando con un punto in grassetto gli zeri del numeratore;
- determinare gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto.

Esempio

■ $\frac{x-1}{2x+2}+\frac{2x+1}{4x-2}>\frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro $\frac{x-1}{2x+2}+\frac{2x+1}{4x-2}-\frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}>0$

Scomponiamo in fattori i denominatori, determiniamo il minimo comune multiplo e sommiamo le frazioni per arrivare alla forma $\frac{N(x)}{D(x)}>0$:

$$\frac{x-1}{2(x+1)}+\frac{2x+1}{2(2x-1)}-\frac{4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0$$

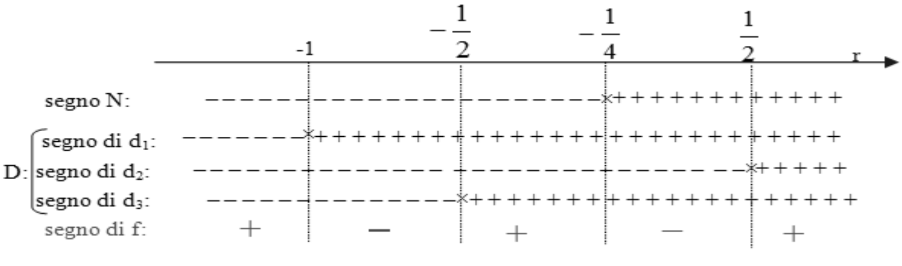
$$\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)+(2x+1)(2x+1)(x+1)-4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0$$

$$\frac{4x+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0 \quad (*)$$

Studiamo separatamente il segno di tutti i fattori che compaiono nella frazione, sia quelli al numeratore sia quelli al denominatore e costruiamo la tabella dei segni:

$N>0\rightarrow 4x+1>0\rightarrow x>-\frac{1}{4}$

$$D>0\begin{cases} x+1>0\rightarrow x>-1 \\ 2x-1>0\rightarrow x>\frac{1}{2} \\ 2x+1>0\rightarrow x>-\frac{1}{2}\end{cases}$$



Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.
Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo come richiesto dalla disequazione (*):

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1\vee -\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\vee x>\frac{1}{2}\right\}$

Esempio

- $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-3}{x-1}+\dfrac{10x-3}{6x-6}\le\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2+2}{3x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro : $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-3}{x-1}+\dfrac{10x-3}{6x-6}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2+2}{3x-2}\le 0$

Eseguiamo le operazioni per semplificare la frazione e ridurla alla forma $\dfrac{N(x)}{D(x)}\le 0$:

$$\frac{x}{2}-\frac{4x-6}{3(x-1)}+\frac{10x-3}{6(x-1)}-\frac{3x^2+6}{2(3x-2)}-\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}\le 0$$

$$\frac{3x(x-1)(3x-2)-2(4x-6)(3x-2)+(10x-3)(3x-2)-3(3x^2+6)(x-1)-2}{6(x-1)(3x-2)}\le 0$$

$$\frac{11x-2}{6(x-1)(3x-2)}\le 0 \quad (*)$$

Studiamo il segno del numeratore e dei fattori del denominatore

$N\ge 0 \;\rightarrow\; 11x-2\ge 0 \;\rightarrow\; x\ge\dfrac{2}{11}$

$D>0\rightarrow\begin{cases} d_1>0\rightarrow x-1>0\rightarrow x>1 \\ d_2>0\rightarrow 3x-2>0\rightarrow x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$

r		$\frac{2}{11}$		$\frac{2}{3}$		1	
segno N:	−	•	+		+		+
D: segno d_1:	−		−		−	×	+
D: segno d_2:	−		−	×	+		+
segno f:	−		+		−		+

Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.
Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo o nullo come dalla disequazione (*):

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\dfrac{2}{11}\vee\dfrac{2}{3}<x<1\right\}$

293 Studia il segno della frazione $f=\dfrac{x^3+11x^2+35x+25}{x^2-25}$.

Traccia di svolgimento
Scomponi in fattori numeratore e denominatore, otterrai

$f=\dfrac{(x+5)^2(x+1)}{(x+5)(x-5)}$

Poniamo le C.E. e semplifica la frazione: … … … …
Studia separatamente il segno di tutti i fattori che vi compaiono. Verifica che la tabella dei segni sia:

r		-5		-1		5	
N: segno n_1:	−	×	+		+		+
N: segno n_2:	−		−	•	+		+
segno D:	−		−		−	×	+
segno f:	−		+		−		+

Risposta
La frazione assegnata, con la $C.E.\ x\ne -5\ e\ x\ne 5$, si annulla se $x=-1$; è positiva nell'insieme $I^+=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<-1\vee x>5\}$, è negativa in $I^-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-5\vee -1<x<5\}$.

Determinate I.S. delle seguenti disequazioni fratte:

294 $\frac{x-2}{3x-9} \geq 0$ $\quad x<2 \vee x>3$ $\qquad \frac{3x+12}{(x-4)(6-3x)} \geqslant 0$ $\quad x \leq -4 \vee 2<x<4$

295 $\frac{x+2}{x-1}<2$ $\quad x<1 \vee x>4$ $\qquad \frac{4-3x}{6-5x} \geqslant -3$ $\quad x<\frac{6}{5} \vee x \geq \frac{11}{9}$

296 $\frac{x+8}{x-2} \geq 0$ $\quad x \leq -8 \vee x>2$ $\qquad \frac{3x+4}{x^2+1} \geq 2$ $\quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

297 $\frac{4}{x+4}+\frac{2}{x-3} \leqslant 0$ $\quad x<-4 \vee \frac{2}{3} \leq x<3$ $\qquad \frac{7}{x+3}-\frac{6}{x+9} \geqslant 0$ $\quad -45 \leq x<-9 \vee x>-3$

298 $\frac{3}{2-x} \leqslant \frac{1}{x-4}$ $\quad 2<x \leq \frac{7}{2} \vee x>4$ $\qquad \frac{2}{x-2}>\frac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$ $\quad x<-3 \vee x>2$

299 $\frac{x-3}{x^2-4x+4}-1<\frac{3x-3}{6-3x}$ $\quad x<2 \vee 2<x<\frac{5}{2}$

300 $\frac{2}{4x-16}<\frac{2-6x}{x^2-8x+16}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<\frac{8}{13}\right\}$

301 $\frac{5}{2x+6} \geqslant \frac{5x+4}{x^2+6x+9}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<-3 \vee -3<x \leq \frac{7}{5}\right\}$

302 $\frac{(x+3)(10x-5)}{x-2}<0$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<-3 \vee \frac{1}{2}<x<2\right\}$

303 $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x^3+1} \leq 0$ $\quad -1<x \leq 1$

304 $\frac{4-3x}{x-2}<\frac{3x+1}{x-2}$ $\quad x<\frac{1}{2} \vee x>2$

305 $\frac{5x-4}{3x-12} \geq \frac{x-4}{4-x}$ $\quad x \leq 2 \vee x>4$

306 $\frac{2-x}{5x-15} \leq \frac{5x-1}{2x-6}$ $\quad x \leq \frac{1}{3} \vee x>3$

307 $\frac{(3x-12)(6-x)}{(24-8x)(36-18x)} \leqslant 0$ $\quad x<2 \vee 3<x \leq 4 \vee x \geq 6$

308 $\frac{(x-2)(5-2x)}{(5x-15)(24-6x)} \geqslant 0$ $\quad x \leq 2 \vee \frac{5}{2} \leq x<3 \vee x>4$

309 $\frac{(x-2)(x+4)(x+1)}{(x-1)(3x-9)(10-2x)} \leqslant 0$ $\quad x \leq -4 \vee -1 \leq x<1 \vee 2 \leq x<3 \vee x>5$

310 $\frac{(5-x)(3x+6)(x+3)}{(4-2x)(x-6)x} \leqslant 0$ $\quad -3 \leq x \leq -2 \vee 0<x<2 \vee 5 \leq x<6$

311 $\frac{(x-5)(3x-6)(x-3)}{(4-2x)(x+6)x} \leqslant 0$ $\quad x<-6 \vee 0<x \leq 3 \vee x \geq 5 \text{ con } x \neq 2$

312 $\frac{(x-3)(x+2)(15+5x)}{x^2-5x+4} \geqslant 0$ $\quad -3 \leq x \leq -2 \vee 1<x \leq 3 \vee x>4$

313 $\frac{(x-4)^2(x+3)}{x^2+5x+6} \geqslant 0$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x>-2\}$

314 $\frac{x}{1-x^2}>\frac{1}{2x+2}-\frac{2}{4x-4}$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-1\}$

315 $\frac{3-x}{x-2}<\frac{x-1}{x+3}+\frac{2}{x^2+x-6}$ $\quad x<-3 \vee -1<x<2 \vee x>\frac{5}{2}$

316 $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{2x+2}$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \vee -2<x<-1\}$

317 $\frac{3}{2x-1} \leq \frac{2x^2}{2x^2-x}-\frac{x+1}{x}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<0 \vee \frac{1}{4} \leq x<\frac{1}{2}\right\}$

318 $\frac{2x^2}{2x^2-x}>1$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{1}{2}\ con\ x\neq 0\right\}$

319 $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x+2}{2x+1}>\frac{3}{2}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{10}\ \vee\ x>\frac{1}{2}\right\}$

320 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}\leq 1$ $x<4\wedge x\neq 3$

321 $\frac{\frac{2}{x+1}}{x^2-1}<0$ $x<-1\vee -1<x<1$

322 $\frac{x}{x+1}-\frac{4-x}{x+2}\geq\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ $x<-2\vee x\geq\frac{5}{2}$

323 $\frac{3}{2x^2-4x-6}-\frac{x-2}{3x+3}<\frac{x-1}{2x-6}$ $x<-1\vee 0<x<2\vee x>3$

324 $\frac{1}{2-2x}\cdot\left(\frac{x(x-2)}{x-1}-\frac{3}{3-3x}\right)>-1$ $x<1\vee x>1$

325 $-\frac{2}{27-3x^2}-\frac{x+1}{2x-6}+\frac{3-2x}{6x-18}<-\frac{3}{x^2-9}+4\frac{x-3}{18-2x^2}$ $x<-3\vee x>3$

326 $\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{x}{x-2}<\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{3x-x^2-2}+\frac{2-x}{4x-4}$ $x<0\vee 1<x<\frac{12}{7}\vee x>2$

327 $\frac{(x-2)(x+4)(x^2+5x+6)}{(x^2-9)(-4-7x^2)(x^2-6x+8)(x^2+4)}<0$ $x<-4\vee -2<x<2\vee 2<x<3\vee x>4$

328 Dopo aver ridotto ai minimi termini la frazione $f=\frac{3x^4-2x^3+3x^2-2x}{6x^2-x-7}$, completa

$f>0$ per $x<-1$ oppure ……………………………………..
$f=0$ per ………………………………………………….
$f<0$ per ………………………………………………….

329 Determinate il segno delle frazioni, dopo averle ridotte ai minimi termini:

$f_1=\frac{1-a^2}{2+3a}$; $f_2=\frac{a^3-5a^2-3+7a}{9-6a+a^2}$ $f_3=\frac{11m-m^2+26a}{(39-3m)(m^2+4m+4)}$

Determinare I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

330 $\begin{cases}\left(1-\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{2}{x}+1\right)>\frac{13}{2}\\ \frac{7+x}{2x}>\frac{2-x}{1-2x}\end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<\frac{7}{17}\ \vee\ \frac{1}{2}<x<2\right\}$

331 $\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-x-1}\geq 0\\ \frac{4x-1-3x^2}{x^2-4}\leq 0\end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2\ \vee\ \frac{1}{3}\leq x<1\ \vee\ x\geq 3\right\}$

332 $\begin{cases}x^2-3x+2\leq 0\\ \frac{6}{2+x}-\frac{x+2}{x-2}>\frac{x^2}{4-x^2}\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x<2\}$

333 $\begin{cases}x+1\leq -2x^2\\ 3x-1<2\left(x-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

334 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x^2+x} \geq 0 \\ x^2-x-6 \geq 0 \\ x^2-4 \leq 0 \end{cases}$ $\qquad I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x=-2\}$

335 $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{9-x^2} > 0 \\ x^2-3x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3 \ con \ \ x \neq 2\}$

336 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} < 0 \\ \dfrac{2-x}{5\text{x}-15} \leq \dfrac{5\text{x}-1}{2\text{x}-6} \end{cases}$ $\qquad x < -2$

337 $\begin{cases} \dfrac{4}{8-4\text{x}} - \dfrac{6}{2\text{x}-4} < 0 \\ \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2}{x^3-8} > 1 \end{cases}$ $\qquad x > 2$

338 $\begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right) < \dfrac{x-4}{2-x} \\ \left(\dfrac{2-x}{x^2-6\text{x}+9} + \dfrac{2+x}{x^2-9}\right) \cdot \dfrac{x^3-27}{2\text{x}} > 0 \end{cases}$ $\qquad 1 < x < 3 \wedge x \neq 2$

339 Motivare la verità o la falsità delle seguenti proposizioni riferite alle frazioni:

$f_1 = \dfrac{a^3-81a}{81-a^2} \qquad f_2 = \dfrac{7a^2+7}{3+3a^4+6a^2} \qquad f_3 = \dfrac{20a-50a^2-2}{4a-20a^2}$

$f_4 = \dfrac{a^4}{2a^4+a^2} \qquad f_5 = \dfrac{1-4a^2}{2-8a+8a^2} \qquad f_6 = \dfrac{2a^2+a^3+a}{2a^2-a^3-a}$

a) f_1 per qualunque valore positivo della variabile è negativa V F

b) f_2 è definita per qualunque valore attribuito alla variabile V F

c) f_3 è positiva nell'insieme $I.S. = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a < 0 \ \vee \ a > \dfrac{1}{5}\right\}$ V F

d) f_4 è positiva per qualunque valore reale attribuito alla variabile V F

e) nell'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ f_5 non si annulla V F

a) f_6 è negativa per qualunque valore dell'insieme $K = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ V F

►12. Equazione lineare in due incognite

Problema

Determinare due numeri naturali la cui somma sia 18.
L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con x e y i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x+y=18$, equazione in due incognite, di primo grado.

DEFINIZIONI. Una equazione di primo grado in due incognite si chiama **equazione lineare**.

Procediamo per determinare l'Insieme Soluzione del problema proposto:
L'obiettivo è trovare $x \in \mathbb{N}$ *e* $y \in \mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$
Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 19 coppie di numeri naturali sopra elencate.
Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 18.
In simboli scriviamo $x \in \mathbb{Q}$ *e* $y \in \mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x;y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$
Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7;+25)$ è soluzione del problema perché sostituendo a x il valore -7 e a y il valore $+25$ si ha $(-7)+(+25)=18$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+25;-7)$ è soluzione del problema perché $(+25)+(-7)=18$.
Se attribuiamo un valore arbitrario a x, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 18 il valore di x: $y=18-x$.
Completa tu

- se $x=-3$ allora y= 18-(-3) = … …, dunque la coppia (… ...; … ...) è soluzione dell'equazione;
- se $x=\frac{3}{2}$ allora y = … … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema.

E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita x valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y=18-x$.
Se $x=\sqrt{2} \rightarrow y=18-\sqrt{2}$ e la coppia $(\sqrt{2};\ 18-\sqrt{2})$ è soluzione dell'equazione
Completa tu:

- se $x=-2\sqrt{3}+1$ allora y = … … … ... … … … … … …
- se $x=18+\frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora y = … … … … … … … … … …

DEFINIZIONE. Si chiama **Insieme Soluzione (I.S.)** di un'equazione di primo grado in due incognite, l'**insieme delle coppie ordinate di numeri reali** che sostituiti rispettivamente a x e a y rendono vera l'uguaglianza.

Completa la tabelle delle coppie di soluzioni dell'equazione indicata

340 $x+2y-1=0$

x		-1	0		$\frac{1}{2}$			2,25	
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	2		1,5

341 $3x-2y=5$

x		0	1		$\frac{1}{6}$			$-\sqrt{2}$	0,25
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$		

342 $3x-2\sqrt{2}\,y=0$

x		0			$\frac{1}{6}$		$\sqrt{2}$
y	0		1	-1		$\sqrt{2}$	

►13. Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

Esempio

Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y-x+1=0$ *con* $x\in\mathbb{R}$ *e* $y\in\mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x\,;\,y)$ di numeri reali tali che $3y-x+1=0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1\,;0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

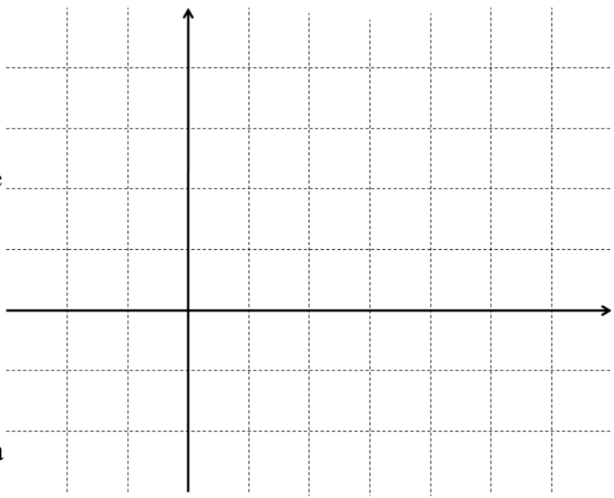
Fissiamo l'attenzione sull'incognita y, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola y, ricaviamo y come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y-x+1=0 \;\rightarrow\; 3y=x-1 \;\rightarrow\; \frac{3y}{3}=\frac{x-1}{3} \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

Ora al variare di x in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.

Prova a determinarne alcune:

x	y	coppia
0	… … …	(0; …)
1	… … …	(1; …)
-1	… … …	(-1; …)



In verità non possiamo trovare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.

La formula $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $a x+b y+c=0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

La formula $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ si chiama **equazione esplicita della retta**.

Esempio

Risolvi graficamente l'equazione $y+\frac{2}{3}x-2=0 \ con \ x\in\mathbb{R} \ e \ y\in\mathbb{R}$

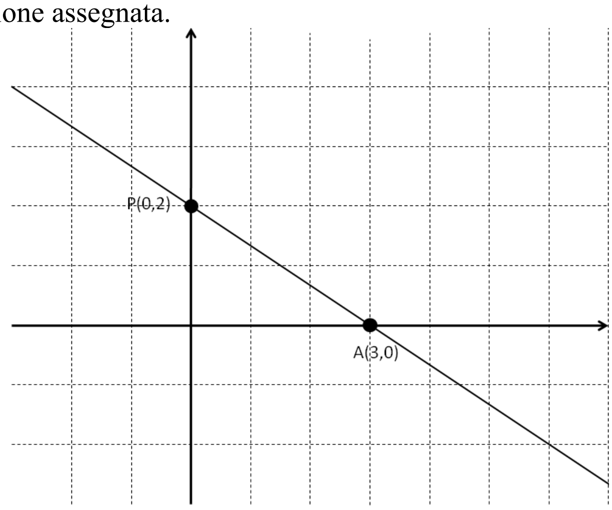
L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

Troviamo l'equazione esplicita della retta: $y+\frac{2}{3}x-2=0 \ \rightarrow \ y=-\frac{2}{3}x+2$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y: $q=2$ quindi $P(0;2)$ è un punto della retta.

Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se x=3 allora y=0, quindi $A(3;0)$ è un punto della retta.

Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie (x;y), coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.



Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite, seguendo i passi sopra descritti:

343 $2x-2y+3=0$ $\qquad -\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}y+1=0$

344 $x+2y+\frac{7}{4}=0$ $\qquad -2y+3=0$

345 $-2x+4y-1=0$ $\qquad 2y+\frac{2}{3}x+6=0$

346 $\sqrt{2}x+\sqrt{6}y=0$ $\qquad \sqrt{3}y+\sqrt{6}=-x$

*Stabilisci quali coppie appartengono all'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione.*

347 $5x+7y-1=0$ $\qquad \left(-\frac{7}{5};0\right), \left(-\frac{1}{5};-1\right), \left(0;\frac{1}{7}\right), \left(\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right)$

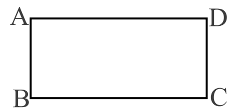
348 $-x+\frac{3}{4}y-\frac{4}{3}=0$ $\qquad (0;-1), \left(\frac{1}{12};\frac{17}{9}\right), \left(-\frac{4}{3};0\right), (-3;4)$

349 $-x-y+\sqrt{2}=0$ $\qquad (\sqrt{2};0), (0;-\sqrt{2}), (1+\sqrt{2};-1), (1;-1-\sqrt{2})$

►14. Definizione di sistema di equazioni

Problema

Nel rettangolo ABCD, la somma del doppio di AB con la metà di BC è di 98m; aumentando AB di 3m e BC di 2m il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in m^2 del rettangolo.



Dati: Obiettivo: Area

$2\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=98\ m.$

$2(\overline{AB}+3\ m+\overline{BC}+2\ m)=180\ m.$

Soluzione:

Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni $Area=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ otteniamo le due equazioni

$$2x+\frac{1}{2}y=98 \qquad 2(x+3+y+2)=180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

DEFINIZIONE. Si definisce **sistema di equazioni** l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene associando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

DEFINIZIONI

L'Insieme Soluzione (I.S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

Si chiama **grado di un sistema** il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama **sistema lineare**.

La **forma normale o canonica** di un sistema lineare è: $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Il problema proposto si formalizza dunque con il sistema: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2(x+3+y+2)=180 \end{cases}$ composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+2y=170 \end{cases}$

►15. Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La **forma canonica** di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto,
$\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a_1\,x+b_1\,y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Esempi

- Scrivere in forma canonica il sistema: $\begin{cases} 4\,x^2-(y+2\,x)^2=x+1-y(4\,x+y-1) \\ \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{y+3}{3}=0 \end{cases}$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:
$\begin{cases} 4\,x^2-y^2-4\,x^2-4\,xy=x+1-4\,xy-y^2+y \\ 3\,x-6+2\,y+6=0 \end{cases}$
Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:
$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3\,x+2\,y=0 \end{cases}$ che è la forma canonica cercata.

►16. Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.
Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'**I**nsieme **S**oluzione, cominciamo dal **metodo di sostituzione**.

Esempio

- $\begin{cases} -3\,x+y=2 \\ 5\,x-2\,y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

- 1° passo: scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita.

Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y
$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3\,x \\ 5\,x-2\,y=7 \end{cases}$

- 2° passo: sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3\,x \\ 5\,x-2\,(2+3\,x)=7 \end{cases}$

- 3° passo: svolgiamo i calcoli nella seconda equazione.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3\,x \\ 5\,x-4-6\,x=7 \end{cases}$

- 4° passo: risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile.

Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} y=2+3\,x \\ 5\,x-4-6\,x=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2+3\,x \\ -x=7+4 \rightarrow x=-11 \end{cases}$

- 5° passo: sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata, avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione.

Nel nostro esempio $\begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \Rightarrow x=-11 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

- 6° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio $I.S.=\{(-11\,;-31)\}$
In conclusione, il sistema è **determinato**, la coppia ordinata $(-11\,;-31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

- $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ y\left(1+\frac{2}{5}\right)-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$

Il sistema non si presenta nella forma canonica.

Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica: $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni:

Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata: $\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y: $\begin{cases} -3y=-47 \rightarrow y=\frac{47}{3} \\ x=15-7y \quad \rightarrow \quad x=\frac{284}{3} \end{cases}$

Sostituiamo il valore di y nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\frac{284}{3} \\ y=\frac{47}{3} \end{cases}$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni: $I.S.=\left\{\left(\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)\right\}$

In conclusione, il sistema è **determinato;** la coppia ordinata $\left(\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)$ verifica le due equazioni del sistema.

- $\begin{cases} \frac{1}{y}=2\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases}$

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre la **C**ondizioni di **E**sistenza e individuare il **D**ominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà

$C.E.\ y\neq 0$ e $x\neq 0$ per cui $D=\mathbb{R}_0\times\mathbb{R}_0$

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{y}=2\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{2x}{y}-1 \\ 5x+4y+19=-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 7x+4(2x-1)=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 15x=-15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2(-1)-1 \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases}$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione

350 $\begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

351 $\begin{cases} y=x \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases}$

352 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

353 $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x+2y=14 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4y-6x=-2 \end{cases}$ R. indeterminato

354 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ *R.* $(1,-1)$ $\begin{cases} x+4y-1=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+1=-\frac{x}{6}-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

355 $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} x+2y=14 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

356 $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=2 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=-9 \end{cases}$ R. indeterminato

357 $\begin{cases} \frac{x-4y}{3}=x-5y \\ x-2=6y+4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-66 \\ y=-12 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y^2-4x+2}{5}=\frac{2y^2-x}{10}-1 \\ x=-2y+8 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

358 $\begin{cases} 3x-\frac{3}{4}(2y-1)=\frac{13}{4}(x+1) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=\frac{1+y}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y-x-1}{2}+x-y+1=\frac{1}{2} \end{cases}$ R. (0;0)

359 $\begin{cases} y-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}=0 \\ \frac{2x+1}{1-x}+\frac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{20};-\frac{4}{5}\right)$ $\begin{cases} x+y=2 \\ 3\left(\frac{x}{6}+3y\right)=4 \end{cases}$ R. $\left(\frac{28}{17};\frac{6}{17}\right)$

360 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{1}{6}x=5-\frac{6x+10}{4} \\ 2(x-2)-3x=40-6\left(y-\frac{1}{3}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2y}{3}+x+1=0 \\ \frac{y+1}{2}+\frac{x-1}{3}+1=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

361 $\begin{cases} (x-2)^2+y=(x+1)(x-y)+(3-y)(2-x) \\ \frac{x}{4}-2y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

362 $\begin{cases} y-\frac{3-2x}{3}=\frac{x-y}{3}+1 \\ \frac{x+1}{2}+\frac{5}{4}=y+\frac{2-3x}{4} \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{6};\frac{35}{24}\right)$

363 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+k=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ kx+(k+1)y+1=0 \end{cases}$

364 Risolvere il sistema che formalizza il problema del paragrafo 3: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+3y=170 \end{cases}$, concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

365 Determinare due numeri reali x e y tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

►17. Metodo del confronto

Esempio

- $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

• 1° passo: ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita.

Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni: $\begin{cases} y=2+3x \\ y=\dfrac{5x-7}{2} \end{cases}$

• 2° passo: poiché il primo membro di entrambe le equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una solo incognita.

Nel nostro esempio $2+3x=\dfrac{5x-7}{2}$

• 3° passo: si risolve l'equazione trovata e si determina il valore di una delle due incognite

Nel nostro esempio $4+6x=5x-7 \rightarrow x=-11$

• 4° passo: si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita.

Nel nostro esempio $\begin{cases} x=-11 \\ y=2+3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

• 5° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio: $I.S.=\{(-11;-31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata (-11;-31) verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi

366 $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

367 $\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $(2;1)$ $\begin{cases} x=-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ R. $(-1;-3)$

368 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

369 $\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=2 \end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-\dfrac{1}{2}y=2 \end{cases}$ R. $\mathbb{R}^+$

370 $\begin{cases} y-\dfrac{3x-4}{2}=1-\dfrac{y}{4} \\ 2y-2x=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$ *R.* $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-y+\dfrac{1}{3}=0 \\ x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}=0 \end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

371 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{6}x=5-\dfrac{6x+10}{8} \\ 8(x-2)+3x=40-6\left(y-\dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{y-4}{3}+1 \\ y=\dfrac{x+3}{3} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

372 $\begin{cases} x-y+k=0 \\ x+y=k-1 \end{cases}$

373 In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168m e la differenza tra la metà della base e 1/13 del lato è 28m. Indicata con x la misura della base e con y quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

►18. Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A=B$ e $C=D$ possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A+C=B+D$

$$\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \rightarrow \quad A+C=B+D$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempi

■ $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x-5y)+(2x+5y)=1-4$

I termini in y si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{5}$.

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'. Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.
Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l'incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

■ $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per –3, otteniamo:

$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 15x-25y=5 \\ -15x+12y=12 \end{cases}$; sommando membro a membro abbiamo

$(15x-25y)+(-15x+12y)=5+12 \quad \rightarrow \quad -13y=17 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{17}{13}$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qulasiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita.

Nel nostro esempio moltiplichiamo come segue: $\begin{matrix} +4 \\ -5 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 12x-20y=4 \\ -25x+20y=20 \end{cases}$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x=24 \rightarrow x=-\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13};-\frac{17}{13}\right)$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

1° passo: per eliminare y moltiplichiamo la prima per b_1 e la seconda per $-b$: $\begin{cases} ab_1x+bb_1y=cb_1 \\ -a_1bx-bb_1y=-bc_1 \end{cases}$

2° passo: sommiamo le due equazioni: $ab_1x-a_1bx=cb_1-bc_1 \rightarrow (ab_1-a_1b)x=cb_1-bc_1$

3° passo: ricaviamo l'incognita x: $x=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b}$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$

4° passo: per eliminare x moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per a: $\begin{cases} -aa_1x+ba_1y=-a_1c \\ aa_1x+ab_1y=ac_1 \end{cases}$

5° passo: sommiamo le due equazion $-a_1by+ab_1y=-a_1c+ac_1 \rightarrow (ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c$

6° passo: ricaviamo l'incognita y: $y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$

La soluzione è $\left(\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b};\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}\right)$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$.

Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione

374 $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

375 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

376 $\begin{cases} 2x+y=1+y \\ 4x+y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2}; y=0\right)$

377 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

378 $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

379 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

380 $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=3 \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{35}{12}; \frac{19}{12}\right)$

381 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{36}{37}; \frac{17}{37}\right)$

382 $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ R. $(-11; -31)$

383 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$

384 $\begin{cases} \frac{4}{3}x-\frac{4y-x}{2}+\frac{35}{12}-\frac{x+y}{4}=0 \\ \frac{3(x+y)}{2}-\frac{1}{2}(5x-y)=\frac{1}{3}(11-4x+y) \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

385 $\begin{cases} x+ay+a=0 \\ 2x-ay+a=0 \end{cases}$

386 $\begin{cases} 2ax+2y-1=0 \\ ax+y=3 \end{cases}$

387 Il segmento AB misura 80cm; il punto P lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.

►19. Metodo di Cramer

DEFINIZIONE. Si chiama **matrice del sistema lineare** di due equazioni in due incognite la tabella $\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama **determinante della matrice** il numero reale $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$ ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\left(\frac{c\,b_1-b\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b};\frac{a\,c_1-a_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}\right)\ con\ a\,b_1-a_1 b\neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un **sistema lineare** è **determinato**, ammette cioè una sola coppia soluzione **se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero**.

388 Stabilire se il sistema $\begin{cases}(x-1)(x+1)-3(x-2)=2(x-y+3)+x^2 \\ x(x+y-3)+y(4-x)=x^2-4x+y\end{cases}$ è determinato.

389 Verificare che il determinante della matrice del sistema $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}y=10^5 \\ 6x-7y=5^{10}\end{cases}$ è nullo.

La regola di Cramer, dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752), ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

- D il determinante della matrice del sistema: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$
- D_x il determinante $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (*)
- D_y il determinante $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (**)

Con la condizione $D\neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D}$$

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases}2x+3y=4 \\ 4x-3y=2\end{cases}$

Calcoliamo i determinanti

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \rightarrow D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot 4=-6-12=-18$$

Poiché $D\neq 0$ il sistema è determinato

$$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-3\cdot 2=-12-6=-18$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1 \rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 4=4-16=-12$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-18}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}\ .$$

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi

390 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. (2;0)

391 $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right)$

392 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ *R.* $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$

393 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ *R.* $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

394 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ *R.* $(21,-12)$

395 $\begin{cases} \frac{y}{5}-\frac{x}{2}=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{240}{19};\frac{350}{19}\right)$

396 $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{34}{37};\frac{16}{37}\right)$

397 $\begin{cases} 4-2x=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{2x+3y}{2}=\frac{7+2x}{2} \end{cases}$ *R.* $\left(1;\frac{7}{3}\right)$

398 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

399 $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-1\right)$

400 $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)$

401 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$

402 $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

403 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+y=2 \end{cases}$ R. $\mathbb{R}^+$

404 $\begin{cases} ax+ay=3a^2 \\ x-2y=-3a \end{cases}$ R. $(a;2a)$

405 $\begin{cases} 3x-2y=8k \\ x-y=3k \end{cases}$ R. $(2k;-k)$

406 Risolvi col metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \frac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}$. Cosa osservi?

►20. Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a_1\,x+b_1\,y=c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \quad D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$$

- Se D≠0 il sistema è **determinato**, esiste una sola coppia soluzione $x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D}$
- Se D=0 si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è **indeterminato**, tutte le coppie di numeri reali verificano entrambe le equazioni, $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **;**
  - 2° caso: se $D_x\neq 0$ e $D_y\neq 0$ il sistema è **impossibile**, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $I.S.=\emptyset$

<u>Esempi</u>

■ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-3)=-6-9=-15\neq 0$ il sistema è determinato.

■ $\begin{cases} 8x-6y=2 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-(-6)\cdot 1=-6+6=0 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot 1-2\cdot 4=8-8=0$

Il sistema è indeterminato.

■ $\begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-(-6)\cdot 2=-3+12=+9 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=8\cdot 2-1\cdot 4=16-4=12$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se D=0 si ha $a\cdot b_1-b\cdot a_1=0 \ \rightarrow\ a\cdot b_1=b\cdot a_1 \ \rightarrow\ \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$. Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi $D_x=0$ si ha $c\cdot b_1-b\cdot c_1=0 \ \rightarrow\ c\cdot b_1=b\cdot c_1 \ \rightarrow\ \frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$. Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x\neq 0$, cioè $\frac{c}{c_1}\neq\frac{b}{b_1}$ il sistema è impossibile.

Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

407 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$

408 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$

409 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$

410 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2 \\ \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

411 $\begin{cases} \frac{1}{7}x-\frac{4}{5}y=0 \\ \frac{5}{4}x-7y=\frac{19}{2} \end{cases}$

412 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

413 $\begin{cases} -40x+12y=-3 \\ 17x-2y=100 \end{cases}$

414 $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

415 $\begin{cases} -x+3y=-\frac{8}{15} \\ 5x-15y=\frac{2^3}{3} \end{cases}$

416 $\begin{cases} \frac{x}{2}=-\frac{y}{2}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$

417 La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

418 Stabilisci per quale valore di a il sistema $\begin{cases} ax+y=-2 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$ è determinato. Se $a=-\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

419 Perché se $a=\frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x+ay=2a \\ 3x+y=2 \end{cases}$ è indeterminato?

420 $\begin{cases} 2x-3ky=2k \\ x-ky=2k \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è impossibile?

421 $\begin{cases} (k-2)x+3y=6 \\ (k-1)x+4y=8 \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è indeterminato?

►21. Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax+by+c=0$	Punto della retta di equazione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema

Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni:

$$x+y=6 \quad \text{e} \quad 2x+\frac{1}{2}y=6$$

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico:

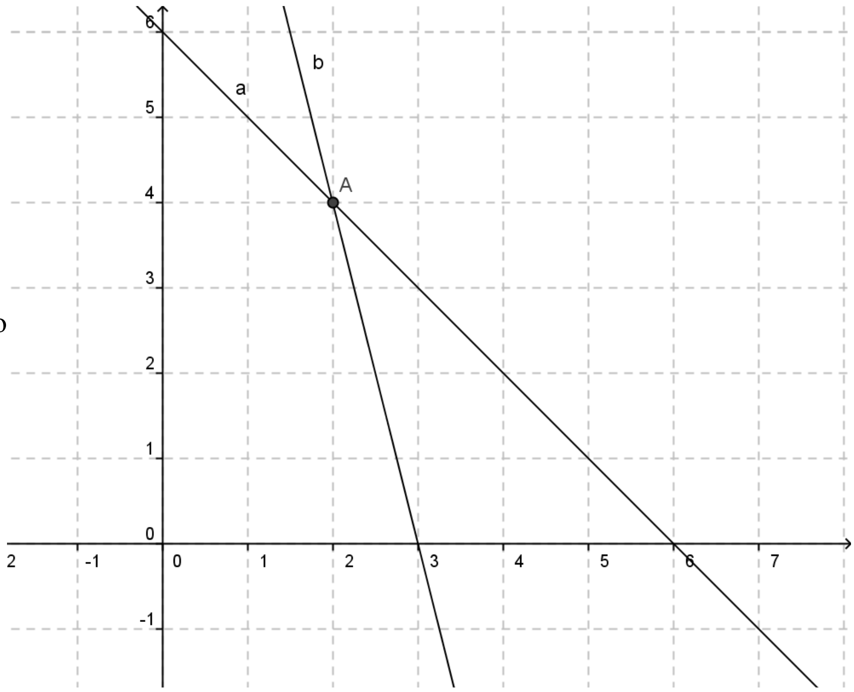
La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$.

Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene x=2 e y=4.

Il punto di vista geometrico:

Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema:



La retta *a* è quella di equazione $x+y=6$, che passa per i punti (6,0) e (0,6).

La retta *b* è quella di equazione $2x+\frac{1}{2}y=6$, che passa per i punti (3,0) e (0,12).

Il punto A(2,4) è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.

Esempio

- $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5x-5y+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-1 \end{cases}$$

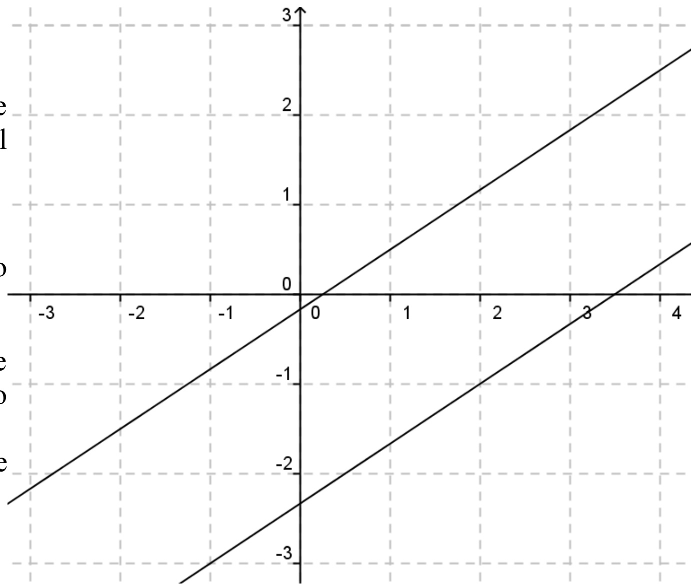
Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione: $\frac{a}{a_1}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$; $\frac{b}{b_1}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2}$, mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1}=\frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: $I.S.=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico

Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-1 \end{cases}$ le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della x e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele.

Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2=\emptyset$, il sistema è impossibile $I.S.=\emptyset$.



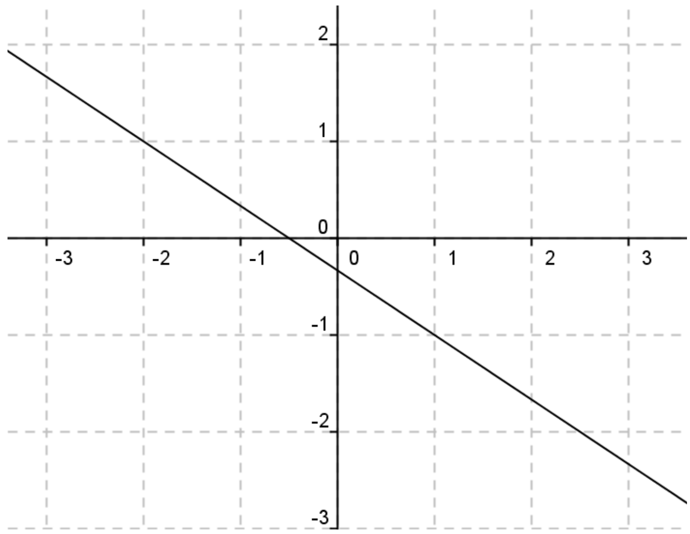
- $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$. Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie (x, y) che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda: $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Il punto di vista geometrico:

Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. E' semplice rendersi conto che le due rette coincidono: tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell'altra; $r_1 \cap r_2=r_1=r_2$.



Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato:

422 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

423 $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=3x+1 \end{cases}$ R. (-3;-8)

424 $\begin{cases} y=x-1 \\ 2y=2x-2 \end{cases}$ R. rette identiche, sistema indeterminato

425 $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 2y-x=2 \end{cases}$ R(2;2)

426 $\begin{cases} \frac{x}{3}=-\frac{y}{3}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

427 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

428 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. (2;0)

429 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

430 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ *R.* $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

431 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R.(1;1)

432 $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$

433 *Vero / Falso*

Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette	V	F
Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione	V	F
Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono	V	F

434 Completa:

se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è ………………………………

Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente

435	$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
436	$\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{7}{5};\frac{6}{5}\right)$	$\begin{cases} 5x-y=2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{5}{17};-\frac{9}{17}\right)$
437	$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$	*R.* $(1;1)$	$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$
438	$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{7}{19};\frac{1}{19}\right)$	$\begin{cases} 7x-2y=4 \\ 8x-6y=9 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{3}{13};-\frac{31}{26}\right)$
439	$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{22}{13};\frac{7}{13}\right)$	$\begin{cases} 3x-y=7 \\ x-2y=5 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$
440	$\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-2x=7 \\ -x-2y=-\frac{1}{2} \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{7}{3};-\frac{11}{12}\right)$
441	$\begin{cases} \frac{2}{3}x-2y=-\frac{1}{6} \\ -y-\frac{2}{3}y=\frac{3}{2} \end{cases}$	*R.* $\left(-\frac{59}{20};-\frac{9}{10}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$	indeterminato
442	$\begin{cases} -\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0 \\ 3x-\frac{1}{5}y+\frac{3}{2}=0 \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=-\frac{123}{266} \\ y=\frac{75}{133} \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{2}{3}y+3x=y \\ x-\frac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=-30 \\ y=-54 \end{cases}$
443	$\begin{cases} 5y+\frac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$	impossibile	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=\frac{1}{2} \\ 3(y-2)+x=0 \end{cases}$	*R.* $\left(\frac{13}{3};\frac{5}{9}\right)$
444	$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-5 \end{cases}$	R. $(-1;2)$	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$	R. $(2;-3)$
445	$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$	R. $(3;3)$	$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$	R. $(2;1)$
446	$\begin{cases} \frac{1}{3}x+3y+2=0 \\ 2x-\frac{1}{2}y=\frac{11}{2} \end{cases}$	R. $(3;-1)$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=1 \end{cases}$	R. $(1;1)$
447	$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases}$	R. $\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=\frac{3}{10} \\ 7x+23y=6 \end{cases}$	R. $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$
448	$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 4x+2y+6=0 \end{cases}$	R. $\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2} \end{cases}$	R. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$
449	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$	R. $\emptyset$	$\begin{cases} 8x-\frac{29}{10}y=7 \\ 5x-\frac{2}{3}y=12 \end{cases}$	R. $\left(\frac{8}{5};-2\right)$
450	$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-y=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{3}{2}(y-2)+x=6\left(x+\frac{1}{3}\right) \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=-\frac{50}{47} \\ y=-\frac{10}{47} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x+4y}{6}-3=0 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=0 \end{cases}$	*R.* $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

451 $\begin{cases} 3(x-4)=-\dfrac{4y}{5} \\ 7(x+y)+8\left(x-\dfrac{3y}{8}-2\right)=0 \end{cases}$ indeterminato

452 $\begin{cases} \dfrac{2}{5}(y-x-1)=\dfrac{y-x}{3}-\dfrac{2}{5} \\ (x-y)^2-x(x-2y)=x+y(y-1) \end{cases}$

453 $\begin{cases} 2x-3(x-y)=-1+3y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

454 $\begin{cases} (y+2)(y-3)-(y-2)^2+(x+1)^2=(x+3)(x-3)-\dfrac{1}{2} \\ \left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{4}\right)-(y-1)^2+2x+3=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

455 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}-y+5}{\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{6}}=x-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}}{2} \\ -x-\dfrac{\dfrac{y}{3}-x}{2}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{92}{27} \\ y=\dfrac{38}{9} \end{cases}$

456 $\begin{cases} x^2+\dfrac{y}{4}-3x=\dfrac{(2x+1)^2}{4}-\dfrac{y}{2} \\ (y-1)^2=-8x+y^2 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases}$

457 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x+1}{2}-y}{2}=y-20x \\ x-\dfrac{y}{4}=\dfrac{x-y}{6} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{21} \\ y=-\dfrac{10}{21} \end{cases}$

458 $\begin{cases} \dfrac{4y-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{5}{6}}=x-2y \\ x=3y \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{27}{26} \\ y=\dfrac{9}{26} \end{cases}$

►22. Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema fratto o frazionario** il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **Dominio** (**D**) o **Insieme di Definizione** (**I.D.**) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempi

■ $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$

1° passo: scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il m.c.m.

$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \quad \rightarrow \quad m.c.m.=(x+1)(y-2)$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio del sistema:
$C.E.\ x\neq -1\ e\ y\neq 2 \ \rightarrow\ D=I.S.=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq -1\ e\ y\neq 2\}$.

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y=11 \\ 11x+15y=6 \end{cases}$

4° passo: risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\dfrac{123}{152};\dfrac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

■ $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x}=3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1}=7 \end{cases}$

1°passo: per la prima equazione si ha $m.c.m.=x$; per la seconda $m.c.m.=y-1$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio:
$C.E.\ x\neq 0\ e\ y\neq 1 \ \rightarrow\ D=I.S.=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq 0\ e\ y\neq 1\}$

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases} 3x+y-1=3x \\ 2x+3y=7y-7 \end{cases}$

4° passo: determiniamo la forma canonica: $\begin{cases} y-1=0 \\ 2x-4y=-7 \end{cases}$

5° passo: determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$ che non accettabile poiché contraddice la C.E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile $I.S.=\emptyset$ **.**

Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi

459 $\begin{cases} \dfrac{4y+x}{5x}=1 \\ \dfrac{x+y}{2x-y}=2 \end{cases}$ indeterminato $\begin{cases} y=\dfrac{4x-9}{12} \\ \dfrac{y+2}{y-1}+\dfrac{1+2x}{1-x}+1=0 \end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{9}{8},-\dfrac{9}{8}\right)$

460 $\begin{cases} 2+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{3x}{y}-1=\dfrac{-2}{y} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{7}{11} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{y}{2x-1}=-1 \\ \dfrac{2x}{y-1}=1 \end{cases}$ impossibile

461 $\begin{cases} \dfrac{3x}{y}-\dfrac{7}{y}=1 \\ \dfrac{2y}{x}+\dfrac{5}{x}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{8}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x}{3y}-\dfrac{1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

462 $\begin{cases} \dfrac{x}{9y}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3y} \\ \dfrac{9y}{2x}-1-\dfrac{3}{x}=0 \end{cases}$ impossibile $\begin{cases} \dfrac{x}{2-\dfrac{y}{2}-2}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+\dfrac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

463 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}-\dfrac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=39 \\ y=-38 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{\dfrac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \dfrac{x}{\dfrac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

464 $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{x-y}=\dfrac{1}{y-x} \\ x=2y-10 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y+3}=1 \\ \dfrac{5}{y+3}=\dfrac{6}{2-x}-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$

465 $\begin{cases} y-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}+\dfrac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{9}{8} \\ y=-\dfrac{9}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ y\left(\dfrac{x}{y}+3\right)=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

466 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{y(y-x-1)}{y+1}+x-y+1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ R. impossibile

467 $\begin{cases} \dfrac{3x-7y+1}{4x^2-9y^2}=\dfrac{4}{18y^2-8x^2} \\ \dfrac{4(1-3x)^2}{2}-y=\dfrac{(12x-5)(6x-y)}{4}+3xy+2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{17} \\ y=\dfrac{6}{17} \end{cases}$

468 $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{x-2y}-\dfrac{3y-1}{x+5y}=\dfrac{2(x^2+2xy)-(3y-2)^2}{x^2+3xy-10y^2} \\ x+y=-19 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-18 \\ y=-1 \end{cases}$

469 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3y+1}+\dfrac{xy-y}{x-3y-1}=\dfrac{x^2-3xy+x^2y-3xy^2+3y^2}{x^2+9y^2-6xy-1} \\ \dfrac{x-3}{5y-1}-\dfrac{y-3}{1+5y}=\dfrac{x+5y^2-5xy+2}{1-25y^2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

470 $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x^2-xy-2y^2}-\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x+y}=-9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

471 $\begin{cases} 2x-y-11=0 \\ \dfrac{y+1}{x-1}+\dfrac{3-y}{5x-5}-\dfrac{2}{3}=0 \end{cases}$

472 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}=\dfrac{y+2}{y-2} \\ \dfrac{3x-1}{3x-2}=\dfrac{1+y}{y-2} \end{cases}$

473 $\begin{cases} \dfrac{2}{5x-y}=\dfrac{-3}{5y-x} \\ \dfrac{1}{4x-3y}=\dfrac{2x+y-1}{3y-4\text{x}} \end{cases}$

474 $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}}=0 \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2\left(y+2\sqrt{2}\right)}=0 \end{cases}$

475 $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1}=2 \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1}=-2 \end{cases}$

476 $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{y-3} \\ \dfrac{1}{y+3}=\dfrac{-1}{2-x} \end{cases}$

►23. Sistemi letterali

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema letterale** il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione

A. Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

Esempio

- $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$

E' un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.
Per **discussione del sistema letterale** s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato.
Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=4a+2$
- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero:
  $4a+2\neq 0 \rightarrow a\neq 0-\frac{1}{2}$. Se $a\neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1) \quad D_y=\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix}=2a^2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2};\ y=\frac{2a^2}{4a+2}$
- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=-\frac{1}{2}$ **;** poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a=-\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a\neq -\frac{1}{2}$	$I.S=\left\{\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2};\frac{2a^2}{4a+2}\right)\right\}$	determinato
$a=-\frac{1}{2}$	$I.S.=\emptyset$	impossibile

B. Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

Esempio

- $\begin{cases} \frac{y+a}{3}-\frac{a-x}{a-1}=a \\ \frac{x+2a}{a}-3=\frac{y}{2}-a \end{cases}$

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme R quei valori che annullano il denominatore.
Se $a=1$ oppure $a=0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema.
Con le condizioni di esistenza $C.E.\ a\neq 1\ e\ a\neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x+(a-1)y=2a^2+a \\ 2x-ay=2a-2a^2 \end{cases}$

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 3 & (a-1) \\ 2 & -a \end{vmatrix}=2-5a$

- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2-5a\neq 0 \to a\neq\frac{2}{5}$
  Se $a\neq\frac{2}{5}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$$D_x=\begin{vmatrix}2a^2+a & -(a-1)\\ 2a-2a^2 & 3\end{vmatrix}=a\cdot(2a-5),\quad D_y=\begin{vmatrix}3 & 2a^2+a\\ 2 & 2a-2a^2\end{vmatrix}=2a\cdot(2-5a)$$

$$x=\frac{a\cdot(2-5a)}{2-5a}\,;\ y=\frac{2a\cdot(2-5a)}{2-5a}\quad \text{e semplificando}\quad (a\,;2a)$$

- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=\frac{2}{5}$ **;** poiché anche i determinanti D_x e D_y si annullano si ha
  Se $a=\frac{2}{5}$ il sistema è indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a=0\vee a=1$		privo di significato
$a\neq\frac{2}{5}$ **e** $a\neq 1$ e $a\neq 0$	$I.S=\{(a\,;2a)\}$	determinato
$a=\frac{2}{5}$	$I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	indeterminato

C. Il sistema è frazionario

Esempio

■ $\begin{cases}\frac{y-a}{x}=\frac{2}{a}\\ x+y=1\end{cases}$

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita x:
Se $a=0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato; per poter procedere alla ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza $C.E.\ a\neq 0$. (*)
Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema $D=\{(x\,;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ (**)

- 1° passo: portiamo nella forma canonica: $\begin{cases}-2x+a\,y=a^2\\ x+y=1\end{cases}$ $con\ a\neq 0\ e\ x\neq 0$
- 2° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix}-2 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2-a=-(2+a)$
- 3° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2-a\neq 0\to a\neq -2$
  Se $a\neq -2$ il sistema è determinato.
- 4° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix}a^2 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=a\cdot(a-1)\quad D_y=\begin{vmatrix}-2 & a^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2-a^2=-(2+a^2)\quad\to\quad x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}\,;\ y=\frac{a^2+2}{2+a}$
  è la coppia soluzione accettabile se $x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}\neq 0$ per quanto stabilito in (**); essendo
  $a\neq 0$ per la (*) la coppia soluzione è accettabile se $a\neq 1$.
- 5° passo: il determinante D è nullo se $a=-2$; essendo i determinanti D_x e D_y diversi da zero si ha:
  se $a=-2$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Condizioni sulle incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x\neq 0$		
$a=0$			privo di significato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0$		$I.S=\left\{\left(-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}\,;\frac{a^2+2}{2+a}\right)\right\}$	determinato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0\ e\ a\neq 1$		accettabile	
$a=-2$			impossibile

477 Risolvere e discutere il sistema: $\begin{cases} x+ay=2a \\ \dfrac{x}{2a}+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$; per quali valori di a la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi? [R. a>0]

478 Perché se il sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$ è determinato la coppia soluzione è accettabile?

479 Nel sistema $\begin{cases} \dfrac{a-x}{a^2+a}+\dfrac{y-2a}{a+1}=-1 \\ 2y=x \end{cases}$ è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a>2$?

480 Spiegate perché non esiste alcun valore di a per cui la coppia (0;2) appartenga a I.S. del sistema: $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$

481 Nel sistema $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-\dfrac{y-a}{3}=\dfrac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}$ determinate i valori da attribuire al parametro a affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi. $\left[R.-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}\right]$

482 $\begin{cases} x+ay=2a \\ \dfrac{x}{2a}+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ R. $a\neq 0 \rightarrow (a;1)$

483 $\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}=x^2-3x+y-2 \\ \dfrac{x^2-4xy+3y^2}{3y-x}=k \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per* $k\neq 14, k\neq\dfrac{6}{7}$ *e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{k-6}{4} \\ y=\dfrac{5k-6}{4} \end{cases}$ *; se* $k=14 \vee k=\dfrac{6}{7}$ *il sistema è impossibile.*

484 $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+6ky=0 \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per ogni k e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{12k}{6k^2+1} \\ y=-\dfrac{2}{6k^2+1} \end{cases}$

485 $\begin{cases} kx-8y=4 \\ 2x-4ky=3 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -2, k\neq 2$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{4k-6}{k^2-4} \\ y=\dfrac{8-3k}{4(k^2-4)} \end{cases}$ *; se* $k=-2$ v $k=2$ *il sistema è impossibile*

486 $\begin{cases} 4x-k^2y=k \\ kx-4ky=-3k \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -4, k\neq 4, k\neq 0$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{3k^2+4k}{16-k^2} \\ y=\dfrac{k+12}{16-k^2} \end{cases}$ *; se* $k=-4$ *v* $k=4$ *il sistema è impossibile; se* $k=0$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$ *con t reale.*

487 $\begin{cases} kx-4ky=-6 \\ kx-k^2y=0 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq 0, k\neq 4$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{6}{4-k} \\ y=\dfrac{6}{k(4-k)} \end{cases}$ *; se* $k=0$ *v* $k=4$ *il sistema è impossibile.*

488 $\begin{cases} (k-1)x+(1-k)y=0 \\ (2-2k)x+y=-1 \end{cases}$ R. S*e* $k\neq 1, k\neq \dfrac{3}{2}$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2k-3} \\ y=\dfrac{1}{2k-3} \end{cases}$ *; se* $k=\dfrac{3}{2}$ *il sistema è impossibile; se* $k=1$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}$.

►24. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Problema

Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità.

Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

- il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo $\rightarrow 2x=-y$
- la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla $\rightarrow x-3z=0$
- la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità $\rightarrow y+z=x+4$

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado $\begin{cases}2x=-y\\x-3z=0\\y+z=x+4\end{cases}$ di tre equazioni in tre incognite.

Puoi ricavare la y dalla prima equazione e sostituire nelle altre due $\begin{cases}y=-2x\\x-3z=0\\-2x+z=x+4\end{cases}$ da cui $\begin{cases}y=-2x\\x-3z=0\\-3x+z=4\end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\-3x+z=4\end{cases}$

Sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\-3(3\mathrm{z})+z=4\end{cases}$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\z=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione $\begin{cases}y=-2x\\x=3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\\z=-\frac{4}{9}\end{cases}$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione $\begin{cases}y=3\\z=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{3}{2}\end{cases}$

■ $\begin{cases}3x+y-z=7\\x+3y+z=5\\x+y-3z=3\end{cases}$

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x+4y=12$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza:

$3(x+3\mathrm{y}+z)+x+y=3\cdot 5+3=4\mathrm{x}+10\mathrm{y}=18$

Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases}4x+4y=12\\4x+10y=18\end{cases}$

Moltiplichiamo la seconda equazione per –1 e sommiamo le due equazioni:

$\begin{cases}4x+4y=12\\-4x-10y=-18\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4x+4y=12\\-4x-10y+4\mathrm{x}+4\mathrm{y}=-18+12\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4x+4y=12\\-6y=-6 \rightarrow y=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$;

la terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi

489 $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y=2 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$ R.(0; -2; 3) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3y+6z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$ R. $\left(3;\frac{8}{9};\frac{1}{9}\right)$

490 $\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$ R.(1; 1;0) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-2y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R:(-21, -7, 12)

491 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};-\frac{2}{7};-\frac{1}{14}\right)$ $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R.(-5; 6; 4)

492 $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$ R.(2; 0; 0) $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ R.(1; 1; 1)

493 $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ R.(0; -1; 0) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

494 $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{9}{31};\frac{17}{31};-\frac{5}{31}\right)$ $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{6};\frac{7}{30};\frac{1}{30}\right)$

495 $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$ R.(5; 3; 2) $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$ $\left(-\frac{60}{43};-\frac{53}{43};\frac{47}{43}\right)$

496 $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ R.(6; 11; -8)

497 $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ $\left(-5;-\frac{33}{4};-\frac{21}{2}\right)$ $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ $\left(-\frac{5}{2};6;\frac{11}{3}\right)$

498 Quale condizione deve soddisfare il parametro *a* affinché il sistema $\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases}$ non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad a il valore 2.

499 Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile:

$$\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

500 Verifica se il sistema è indeterminato $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases}$

501 Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di x, y, z ottenuti risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases}$

►25. Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni sistemi possono essere ricondotti a sistemi lineare per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

■ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{y}=-1 \end{cases}$

Con la seguente sostituzione di varibili (*) $\begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=\dfrac{1}{y} \end{cases}$ il sistema diventa $\begin{cases} u+2\mathrm{v}=3 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$.

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione $\begin{cases} 2\mathrm{u}+4\mathrm{v}=6 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $4\mathrm{u}=5$ dalla quale possiamo determinare $u=\dfrac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, otteniamo $\begin{cases} -2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-6 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $-8\mathrm{v}=-7$ da cui $v=\dfrac{7}{8}$.

Avendo trovato i valori delle incognite *u* e *v* possiamo ricavare x e y sostituire i valori trovati in (*):

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{7}{8}=\dfrac{1}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{8}{7} \end{cases} .$$

Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili

502 $\begin{cases} \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}=-4 \\ \dfrac{2}{3x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$ sostituire $u=\dfrac{1}{x};\quad v=\dfrac{1}{y}$ R. $\left(-\dfrac{1}{27};\dfrac{2}{19}\right)$

503 $\begin{cases} \dfrac{5}{2x}-\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$ R. $\left(\dfrac{7}{6};14\right)$

504 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(1;1)$

505 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=-3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(2;-1)$

506 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{y-1}=3 \end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{1}{4};-2\right)$

507 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-3 \end{cases}$ R. $\left(1;-\dfrac{5}{8};-\dfrac{5}{7}\right)$

508 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ 2x^3-y^3=-6 \end{cases}$ R. $(1;2)$

509 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ sostituire $u=x^2;\quad v=y^2$ R. $(3;2),(-3;2),(3;-2),(-3;-2)$

510 $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2-3y^2=12 \end{cases}$ Nessuna soluzione reale

511 $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=2 \\ \dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$ R. $(1;1;1),(-1;1;1),(1;-1;1),(1;1;-1),$ $(-1;-1;1);(-1;1;-1),$ $(1;-1;-1),(-1;-1;-1)$

512 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=1 \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}=2 \end{cases}$ sostituire $u=\dfrac{1}{x+y};v=\ldots$ R. $\left(\dfrac{55}{9};-\dfrac{44}{9}\right)$

►26. Problemi risolvibili con sistemi

513 Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

514 Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6. [18*; 18*]

515 Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due. [18,75; 21,75; 40,5]

516 Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del primo aumentato di 1/4 del secondo, la loro differenza è pari a 1/3 del primo. [*27; 36*]

517 Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49. [*26; 31*]

518 Determina tre numeri si sa che: il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato. [12, 13, 25]

519 Determina un numero di due cifre sapendo che la cifrà delle dicine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente. [63]

520 Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifrè è 12. [75]

521 * Determina due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12.

522 * Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale. [84]

523 * Determinare la frazione che diventa uguale a 5/6 aumentando i suoi termini di 2 e diventa 1/2 se i suoi termini diminuiscono di 2.

524 * La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi. [35, 30]

525 * Un numero naturale diviso per 3 dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziete. [70, 118, 23]

526 Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa 180€ e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: "Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici". Giulia ribatte: "se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io". Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia? [108; 144]

527 A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati 216€ per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano 1€, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano 1,5€, gli adulti pagano 3€. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

528 Da un cartone quadrato di lato 12cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2 cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è 33,6cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

529 Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono €4,60, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono €6,90. E' possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto? [*indeterminato*]

530 Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto? [0,7 e 0,9]

531 Un cicloturista percorre 218km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe? [*60; 72; 86*]

532 In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto? [*27, 16*]

533 Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

534 Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha 5 € in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

535 Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

536 In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In totale le ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio. [30; 20; 12]

537 Un vasetto di marmellata pesa 780 g. Quando nel vasetto rimane metà marmellata, il vasetto pesa 420g. Quanto pesa il vasetto vuoto?

538 Una gelateria prepara per la giornata di Ferragosto 30 kg di gelato. Vende i coni da due palline a1,50€ e i coni da tre palline a 2,00€. Si sa che da 2kg di gelatosi fanno 25 palline di gelato. A fine giornata ha venduto tutto il gelato e ha incassato 387,50€. Quanti coni da due palline ha venduto? [130]

539 Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre e il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Determina l'età di Marco e di Luca (*Prove Invalsi 2004-2005*)

540 Oggi Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni hanno attualmente i due? (*Giochi d'autunno 2010, Centro Pristem*)

541 Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 euro. Con grande generosità però gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo? (*Giochi di Archimede, 2008*)

542 Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano €1,50; cornetto e succo di frutta costano €1,80, caffè e succo di frutta costano €1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta? [*€11,90*]

543 * Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute?

544 * Nella città di Non fumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i 2/3 delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono i 9/16 delle latterie. Dall'anno scorso a quest'anno il numero cimplessivo dei negozi di Non fumo è rimasto lo stesso. Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo? [30]

545 Un rettangolo di perimetro 80cm ha la base che è i 2/3 dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

546 Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72cm. La base minore è i 3/4 della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei 2/3 della base minore con i 3/2 della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio. $\left[\frac{288}{23}cm;\ \frac{216}{23}cm\right]$

547 Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto 3/2. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16cm. $\left[1536\,cm^2\right]$

548 In un triangolo rettangolo i 3/4 dell'angolo acuto maggiore sono pari ai 24/13 dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli. [*26°; 64°*]

549 In un triangolo, un angolo supera di 16° un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai 29/16 della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo. [24°; 40°; 116°]

550 In un rettangolo di perimetro 120cm, la base è 2/3 dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [*864*]

551 Determina le misure dei tre lati x, y, z di un triangolo sapendo che il perimetro è 53cm, inoltre la misura z differisce di 19cm dalla somma delle altre due misure e che la misura x differisce di 11cm dalla differenza tra y e z.

552 Aumentando la base di un rettangolo di 5cm e l'altezza di 12cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120cm che è più lungo di 12cm del perimetro del rettangolo iniziale. [impossibile]

553 In un triangolo isoscele di perimetro 64cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo. [*16cm, 24cm*]

554 Un segmento AB di 64cm viene diviso da un suo punto P in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minire aumentato di 20cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso AB dal punto P. [*7cm; 16cm*]

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 53; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

Autori

Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Claudio Carboncini: integrazioni, editing
Antonio Bernardo: coordinatore, esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Erasmo Modica: integrazioni, esercizi
Gemma Fiorito: correzioni
Nicola De Rosa: correzioni, esercizi
Lucia Rapella: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 3.1 del 26.05.2012