

# MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

## 2. INSIEMI



*Stonehenge* photo by: radical.librarian  
[http://www.flickr.com/photos/radical\\_librarian/3564677324](http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324)

### Indice

► 1. Generalità sugli insiemi.....98

▶ 2. Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità.....	100
▶ 3. Rappresentazione degli insiemi.....	101
▶ 4. Operazioni con gli insiemi.....	105
▶ 5. I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema.....	118
▶ 6. Proposizioni e predicati.....	122
▶ 7. Relazioni in un insieme.....	122
▶ 8. Proprietà delle relazioni.....	125
▶ 9. Relazioni di equivalenza.....	129
▶ 10. Relazioni di ordine.....	132
▶ 11. Corrispondenze tra insiemi.....	135
▶ 12. Funzioni o applicazioni.....	141
▶ 13. La retta e gli insiemi numerici.....	147
▶ 14. Il metodo delle coordinate cartesiane.....	149
▶ 15. Il grafico di una funzione.....	154
▶ 16. Particolari relazioni d'equivalenza.....	165
▶ 17. Insiemi finiti e insiemi infiniti.....	172

## ► 1. Generalità sugli insiemi

### Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola **insieme** per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure... che sono detti **elementi** dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.

La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

#### Esempi

Sono insiemi:

1. l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
2. l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
3. l'insieme delle città della Puglia con più di 15000 abitanti;
4. l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
5. l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
6. l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:

- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:

1. i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
2. le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
3. le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
4. l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

**1** Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi:

- |   |   |
|---|---|
| [A] I fiumi più lunghi d'Italia;            | [F] gli animali con 2 zampe;                |
| [B] Le persone con più di 30 anni;          | [G] le vocali dell'alfabeto italiano;       |
| [C] i numeri 1, 20, 39, 43, 52;             | [H] i professori bravi;                     |
| [D] i libri più pesanti nella tua cartella; | [I] i gatti con due code;                   |
| [E] i punti di una retta;                   | [J] i calciatori che hanno fatto pochi gol. |

In generale:

- Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole  $A, B, C, \dots$ ;
- Gli elementi con lettere minuscole  $a, b, c, \dots$ ;
- Se un elemento  $a$  sta nell'insieme  $A$  si scrive  $a \in A$ , si legge "a appartiene ad A";

Il simbolo  $\in$  si chiama simbolo di **appartenenza**.

- Se un elemento  $b$  non sta nell'insieme  $A$  si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive  $b \notin A$ , si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo  $\notin$  si chiama simbolo di **non appartenenza**.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama **proprietà caratteristica**.

Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:

- $\mathbb{N}$  si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- $\mathbb{Z}$  si utilizza per indicare i numeri interi relativi:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ ;
- $\mathbb{Q}$  si utilizza per indicare i numeri razionali:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12, 34, 0, \overline{25} \dots \right\}$

#### Esempi

Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme  $A$  dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$\text{lunedì} \in A$   
 $\text{giovedì} \in A$

$\text{martedì} \in A$   
 $\text{dicembre} \notin A$

$\text{gennaio} \notin A$   
 $\text{estate} \notin A$

Consideriamo l'insieme  $A = \{r, s, t\}$  e l'insieme  $B$  delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che  $A$  e  $B$  sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono **insiemi uguali**.

**DEFINIZIONE.** Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli  $A=B$ . Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **diversi** se non contengono gli stessi elementi: in simboli  $A \neq B$ .

**2** Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra  $\in, \notin$ ,  $A$  è l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano:

b ... A      i ... A      j ... A      e ... A      w ... A      z ... A

**3** Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

[A] sito      [B] micio      [C] zitto      [D] fiocco      [E] lecito      [F] dito

**4** Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali

[A] vocali della parola SASSO      [C] consonanti della parola SASSO  
[B] vocali della parola PIETRA      [D] vocali della parola PASSO

**5** Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce.       | V | F |
| b) I laghi d'Italia.                                   | V | F |
| c) Le città vicine a Roma.                             | V | F |
| d) I calciatori della Juventus.                        | V | F |
| e) I libri di Mauro.                                   | V | F |
| f) I professori bassi della tua scuola.                | V | F |
| g) I tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M. | V | F |
| h) I tuoi compagni di classe che sono gentili.         | V | F |
| i) Gli zaini neri della tua classe.                    | V | F |

**6** Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra  $\in$  e  $\notin$ :

- a) La Polo ..... all'insieme delle automobili Fiat.  
b) Il cane ..... all'insieme degli animali domestici.  
c) La Puglia ..... all'insieme delle regioni italiane.  
d) Firenze ..... all'insieme delle città francesi.  
e) Il numero 10 ..... all'insieme dei numeri naturali.  
f) Il numero 3 ..... all'insieme dei numeri pari.

**7** Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) Essere città italiana il cui nome inizia per W  | V | F |
| b) Essere un bravo cantante                        | V | F |
| c) Essere un monte delle Alpi                      | V | F |
| d) Essere un ragazzo felice                        | V | F |
| e) Essere un numero naturale grande                | V | F |
| f) Essere un ragazzo nato nel 1985                 | V | F |
| g) Essere gli alunni della classe 1 <sup>a</sup> C | V | F |
| h) Essere le lettere dell'alfabeto inglese         | V | F |
| i) Essere le rette del piano                       | V | F |
| j) Essere i libri interessanti della biblioteca    | V | F |
| k) Essere gli italiani viventi nati nel 1850       | V | F |
| l) Essere gli italiani colti                       | V | F |

**8** Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra  $=$  e  $\neq$

- a) L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono .....
- b) L'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono .....
- c) L'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono .....
- d) L'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono .....
- e) L'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono .....
- f) L'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono .....
- g) L'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono .....
- h) L'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono .....
- i) L'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono .....
- j) L'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono .....

**9** Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.



### ► 3. Rappresentazione degli insiemi

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

#### Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.

Per esempio, definiamo un insieme  $X$  con la scrittura:  $X = \{1, 2, 3, 5\}$

Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè:  $X = \{1, 2, 3, 5\} = \{2, 1, 5, 3\}$

È invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme  $Y$  delle lettere della parola autunno, scriviamo  $Y = \{a, u, t, n, o\}$ .

Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.

Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare

$$X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$$

#### Esempi

- L'insieme  $G$  dei primi 3 giorni della settimana si indica:  $G = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì}\}$
- L'insieme  $A$  delle lettere della parola "Associazione" si indica:  $A = \{a, s, o, c, i, z, n, e\}$

#### Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.

Per esempio, l'insieme  $Y$  dei divisori di 10 può essere definito come:  $Y = \{x / x \text{ è un divisore di } 10\}$

Si legge "Y è l'insieme degli elementi  $x$  tali che  $x$  è un divisore di 10".

In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme.

La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è  $Y = \{1, 2, 5, 10\}$ .

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme  $X$  dei naturali minori di 15 è:  $X = \{x \in \mathbb{N} / x < 15\}$

Si legge "X è l'insieme dei numeri naturali  $x$  tali che  $x$  è minore di 15".

L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ ) è l'**insieme universo** definito precedentemente.

Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

#### Esempi

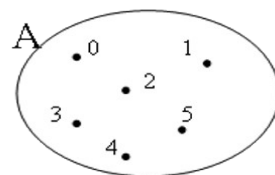
- L'insieme  $A$  delle rette incidenti a una retta  $t$  assegnata si può rappresentare come:  
 $A = \{r / r \text{ è una retta incidente a } t\}$
- L'insieme  $B$  dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:  
 $B = \{n \in \mathbb{N} / n > 100\}$
- L'insieme  $P$  dei numeri pari può essere rappresentato come:  
 $P = \{n \in \mathbb{N} / n = 2 \cdot m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$
- L'insieme  $C$  dei numeri interi relativi compresi tra -10 e +100, estremi inclusi:  
 $C = \{n \in \mathbb{Z} / -10 \leq n \leq 100\}$

#### Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

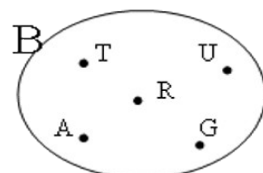
In questa rappresentazione grafica, detta anche **rappresentazione di Eulero-Venn**, in onore dei matematici Leonhard Euler (1707–1783) e John Venn (1834–1923), si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

#### Esempi

- $A$  è l'insieme dei numeri naturali minori di 6,  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



- $B$  è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA",  $A = \{t, a, r, u, g\}$



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

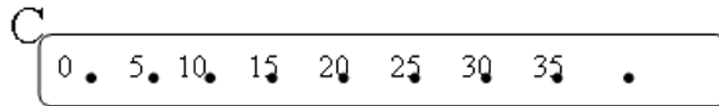
**Esempio**

Vediamo come è possibile rappresentare l'insieme  $C$  dei multipli di 5:

Per caratteristica:  $C = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è multiplo di } 5\}$  oppure  $C = \{n \in \mathbb{N} / n = 5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

tabulare:  $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$ . I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



**16** Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme  $A$  dei numeri naturali minori di 6.

**17** Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

- a) delle vocali della parola "ESERCIZI"
- b) delle lettere della parola "RIFLETTERE"
- c) dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi
- d) dei numeri dispari compresi tra 10 e 20
- e) delle lettere dell'alfabeto italiano
- f) dei numeri naturali minori di 10
- g) dei multipli di 7
- h) delle preposizioni con più di due lettere

**18** Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.

- a)  $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$  .....
- b)  $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x < 5\}$  .....
- c)  $C = \{x \in \mathbb{N} / 5 \leq x \leq 10\}$  .....
- d)  $D = \{x \in \mathbb{N} / 2x \leq 10\}$  .....
- e)  $E = \{e \in \mathbb{N} / 5 \leq x < 10\}$  .....
- f)  $F = \{f \in \mathbb{N} / f \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } f < 15\}$  .....
- g)  $G = \{g \in \mathbb{N} / g \text{ è una cifra del numero } 121231\}$  .....
- h)  $H = \{h \in \mathbb{N} / h = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$  .....

**19** Elenca per tabulazione gli elementi di  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è pari}, x \leq 10, x \neq 0\}$ .

**20** Elenca per tabulazione gli elementi di  $L = \{l \text{ è una lettera della parola } \textit{MATEMATICA}\}$ .

**21** Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

$D = \{S, T, U, D, I, A, R, E\}$   $D = \{x / x \text{ è } \dots\}$

**22** Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$   $X = \{x \in \mathbb{N} / x \dots\}$

**23** Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

**24** Elenca gli elementi dell'insieme  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è divisore di } 12\}$

**25** Elenca gli elementi dell'insieme  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è multiplo di } 3 \text{ minore di } 20\}$

**26** Dato l'insieme  $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$  quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?

- [A]  $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è numero pari minore di } 65\}$
- [B]  $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è una potenza di } 2\}$
- [C]  $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ è una potenza di } 2 \text{ minore di } 65\}$
- [D]  $A = \{n \in \mathbb{N} / n = 2^m, \text{ con } m = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**27** Indica con una proprietà caratteristica l'insieme  $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ .

**28** Indica con una proprietà caratteristica l'insieme  $B = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ .

**29** Quale delle seguenti frasi individua la proprietà caratteristica di  $A = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

- [A] I multipli di 2
- [B] i numeri pari
- [C] i multipli di 4
- [D] i divisori di 20

**30** Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi

- a)  $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- b)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 98, 99, 100\}$
- c)  $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

**31** Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme  $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ .

- [A]  $D = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 18\}$
- [B]  $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } x < 20\}$
- [C]  $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3x\}$
- [D]  $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3\}$

**32** Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica:

- a)  $A = \{\text{gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto}\}$
- b)  $B = \{\text{Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine}\}$
- c)  $C = \{\text{sabato, domenica}\}$
- d)  $D = \{10, 20, 30, 40, 50\}$
- e)  $E = \{\text{Puglia, Piemonte}\}$

**33** Individua una proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici

- a)  $A = \{4, 9, 16, 25, \dots\}$
- b)  $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots \right\}$
- c)  $C = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \right\}$
- d)  $D = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots \right\}$
- e)  $E = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \dots \right\}$
- f)  $F = \{+1, -2, +4, -8, +16, -32, +64, \dots\}$

**34** Elenca gli elementi dei seguenti insiemi

- a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$
- b)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq 1 \text{ o } 5 < x \leq 7\}$

**35** Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi

- a)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- b)  $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$
- c)  $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- d)  $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$
- e)  $E = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$
- f)  $F = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

**36** Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi

- a)  $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x = 2n\}$
- b)  $B = \{x / x \in \mathbb{N}, x = n^2\}$
- c)  $C = \{x / x \in \mathbb{N}, x = 2n^2\}$
- d)  $D = \{x / x \in \mathbb{N}, x = 2n + 2\}$
- e)  $E = \{x / x \in \mathbb{N}, x = n^2 - n\}$
- f)  $E = \{x / x \in \mathbb{Z}, x = \frac{n+1}{n-1}\}$

**37** Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:

- a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
- b) delle note musicali;
- c) dei numeri primi minori di 20;
- d) delle consonanti della parola MATEMATICA;
- e) delle province della Toscana.

**38** Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica:

- a) Insieme A dei divisori di 30.
- b) Insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10.
- c) L'insieme C delle province della Puglia.
- d) L'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

**39** Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:

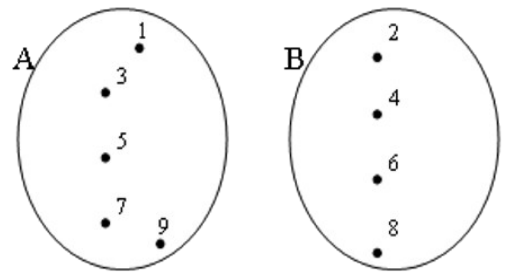
- a) I numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000.
- b) I colori dell'arcobaleno.
- c) I numeri razionali maggiori o uguali a  $2/7$ .
- d) I punti di una superficie S.
- e) Le lettere di cui è composto il tuo nome.

**40** Rappresenta con una modalità a tua scelta l'insieme dei numeri interi multipli di 5 maggiori di 10 e minori di 100 che non sono dispari.



**41** In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn, stabilisci quali affermazioni sono vere:

- |                       |   |   |
|-----------------------|---|---|
| a) $5 \notin B$       | V | F |
| b) $A = \emptyset$    | V | F |
| c) $3 + 2 \in A$      | V | F |
| d) $B \neq \emptyset$ | V | F |
| e) $6 \in B$          | V | F |
| f) $9 \notin A$       | V | F |



**42** Dati gli insiemi:  $X = \{8, 9, 10\}$ ,  $Y = \{0, 8, 9, 10\}$ ,  $H = \{10, 9, 8\}$   
 $W = \{w \in \mathbb{N} / 8 \leq w \leq 10\}$ ,  $Z = \{z \in \mathbb{N} / 8 < z \leq 10\}$ ,  $J = \{j \in \mathbb{N} / 7 < j < 11\}$

Individua le uguaglianze corrette

- |             |                          |             |
|-------------|--------------------------|-------------|
| [A] $X = Y$ | [B] $X = H$              | [C] $W = H$ |
| [D] $X = Z$ | [E] $\text{card}(Z) = 2$ | [F] $X = J$ |

**43** Dati gli insiemi:

- |                      |                        |   |
|----------------------|------------------------|---|
| $A = \{g, a, t, o\}$ | $B = \{o, g, t, a\}$   | $C = \{c/c \text{ è una lettera della parola "gatto"}\}$      |
| $D = \{g, t\}$       | $E = \{\text{gatto}\}$ | $F = \{f / f \text{ è una consonante della parola "gatto"}\}$ |

Segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

- |             |             |             |                          |                          |
|-------------|-------------|-------------|--------------------------|--------------------------|
| [A] $A = B$ | [C] $A = C$ | [E] $C = E$ | [G] $\text{card}(C) = 5$ | [I] $\text{card}(E) = 5$ |
| [B] $A = D$ | [D] $E = A$ | [F] $D = F$ | [H] $D = E$              | [L] $C = D$              |

**44** Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

- |   |         |
|---|---------|
| a) $X = \{x \in \mathbb{N} / x - 1 \text{ è pari}\}$  | {.....} |
| b) $Y = \{y \in \mathbb{N} / y = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$                                 | {.....} |
| c) $Z = \{z \in \mathbb{N} / z = 3n \text{ e } z \text{ non è divisibile per } 2, n \in \mathbb{N}\}$ | {.....} |
| d) $W = \{w \in \mathbb{N} / w < 0\}$   | {.....} |

**45** Quali delle seguenti scritture sono vere?

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$                                       | V | F |
| b) $15 \in \{n \in \mathbb{N} / n \geq 10\}$                        | V | F |
| c) $7 \in \{n \in \mathbb{N} / n + 5 < 10\}$                        | V | F |
| d) $l \notin \{x / x \text{ è una lettera della parola 'scuola'}\}$ | V | F |

**46** Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

- |                                   |                                    |                         |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| $A = \{1+3, 5-2, 1+1, 9-8, 1-1\}$ | $B = \{n \in \mathbb{N} / n < 5\}$ | $C = \{6-4, 6+4, 6-6\}$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------|

**47** Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

- |  |  |
|--|--|
| [A] $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x \leq 12\}$                    | [C] $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 13\}$                          |
| [B] $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3n \text{ con } 1 \leq n \leq 4\}$ | [D] $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n \text{ con } n = 1, 2, 3, 4\}$ |

## ► 4. Operazioni con gli insiemi

### Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme  $A$  degli abitanti di Milano e l'insieme  $B$  degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme  $B$  sono anche elementi di  $A$ : si dice che  $B$  è sottoinsieme di  $A$ , si scrive  $B \subseteq A$ .

Nel caso in cui tutti gli elementi di  $Y$  siano elementi di  $X$  e tutti gli elementi di  $X$  siano elementi di  $Y$  si ha che  $X=Y$ , e  $Y$  si dice **sottoinsieme improprio** di  $X$ : se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq X$  allora  $Y=X$ .

Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto  $\emptyset$ , cioè qualunque sia l'insieme  $X$  risulta che  $\emptyset \subset X$ . **L'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.**

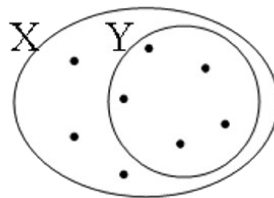
Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.

Se  $Y$  è un sottoinsieme di  $X$  e  $X$  ha altri elementi oltre a quelli di  $Y$  si dice che  $Y$  è un **sottoinsieme proprio** di  $X$  e si scrive  $Y \subset X$ . La scrittura  $A \subseteq B$  si usa quando non si sa in modo certo se  $A=B$  o  $A \subset B$ .

**DEFINIZIONE.** Dati due insiemi  $X$  e  $Y$ , si dice che  $Y$  è un **sottoinsieme** di  $X$  se ogni elemento di  $Y$  è anche elemento di  $X$ .

In simboli:  $Y \subseteq X$ , che si legge " $Y$  è incluso in  $X$ " o " $Y$  è sottoinsieme di  $X$ ".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



Se  $a$  è un elemento del sottoinsieme  $Y$ , allora lo sarà anche dell'insieme  $X$ :

se  $a \in Y$  e  $Y \subseteq X$  allora  $a \in X$ .

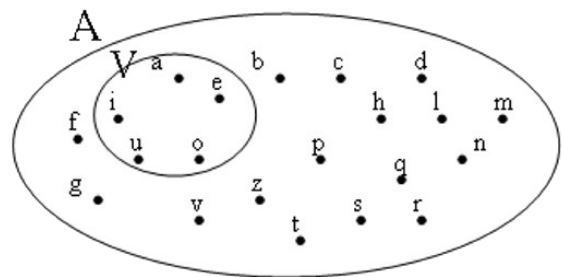
Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli  $X \subseteq X$ .

Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme  $X$  risulta  $\emptyset \subseteq X$ .

### Esempi

- Consideriamo l'insieme  $X = \{\text{lettere della parola "autunno"}\}$  e l'insieme  $Y = \{\text{lettere della parola "notaio"}\}$ ; possiamo affermare che "ogni" elemento di  $Y$  è anche elemento di  $X$ ? La risposta è negativa:  $i \in Y$  ma  $i \notin X$  quindi  $Y$  non è sottoinsieme di  $X$  e si scrive  $Y \not\subseteq X$ .

- Sia  $A$  l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e  $V$  l'insieme delle vocali, allora si può scrivere  $V \subset A$ ; cioè  $V$  è un sottoinsieme proprio di  $A$ , come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



- Sia  $C = \{1\}$ , allora  $C$  non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono  $C = \{1\}$  e l'insieme vuoto  $\emptyset$ .
- Sia  $A$  l'insieme delle auto esposte in un autosalone e  $U$  l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che  $U$  è un sottoinsieme di  $A$ , ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere  $U \subseteq A$ . Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora  $U = \emptyset$ .

**48** Siano  $T = \{t / t \text{ è un triangolo}\}$ ,  $R = \{r / r \text{ è un rettangolo}\}$ ,  $E = \{e / e \text{ è un triangolo equilatero}\}$ .

Quale affermazione è vera?

[A]  $R \subset T$

[B]  $E \subset T$

[C]  $E \subset R$

[D]  $T \subset E$

## Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme  $A$  dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme  $A$  possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di  $A$ .

### Esempi

Determinare tutti i sottoinsiemi di  $A = \{1, 2, 3\}$ .

$\emptyset \subset A$ , infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento:  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ .

Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi:  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ .

L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è  $A$  stesso, possiamo scrivere:  $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

**DEFINIZIONE.** Dato un insieme  $A$ , si chiama **insieme delle parti** l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di  $A$ . In simboli:  $\wp(A)$ .

L'insieme delle parti di un insieme  $A$  ha sempre come elementi  $\emptyset$  e  $A$ , quindi  $\emptyset \in \wp(A)$  e  $A \in \wp(A)$ .

Il numero degli elementi di  $\wp(A)$ , cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di  $A$ .

### Esempi

- L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso quindi  $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- Dato l'insieme  $A = \{a\}$  i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:  
 $S_1 = \emptyset$ ,  $S_2 = \{a\}$  allora  $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$
- Dato l'insieme  $B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$  i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:  
 $S_1 = \emptyset$ ,  $S_2 = B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$ ,  $S_3 = \{\text{matita}\}$ ,  $S_4 = \{\text{penna}\}$  allora  
 $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$
- Dato l'insieme  $B = \{1, 2, 3\}$ , i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:  
 $S_1 = \emptyset$ ,  $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_3 = \{1\}$ ,  $S_4 = \{2\}$ ,  $S_5 = \{3\}$ ,  $S_6 = \{1, 2\}$ ,  $S_7 = \{1, 3\}$ ,  $S_8 = \{2, 3\}$
- allora  $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

Riassumendo:

- se  $A = \emptyset$  l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se  $A$  ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se  $A$  ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se  $A$  ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8;
- Generalizzando, se  $A$  ha  $n$  elementi, l'insieme della parti ne ha  $2^n$ .

**49** Se  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 3\}$  allora  $\wp(A)$  ha:  
 [A] 2 elementi      [B] 3 elementi      [C] 4 elementi      [D] 8 elementi

**50** Considera l'insieme  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 5\}$  e  $\wp(B)$  quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

$\{1\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$0 \in \emptyset$	[V] [F]
$\emptyset \subset \wp(B)$	[V] [F]	$\emptyset \subseteq B$	[V] [F]
$\{2, 5\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$\{1, 2, 3\} \in \wp(B)$	[V] [F]
$\{\emptyset\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$\{1, 2, 3\} \notin \wp(B)$	[V] [F]

**51** Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti  $\{\emptyset, \{8, 10\}, \{8\}, \{10\}\}$ .

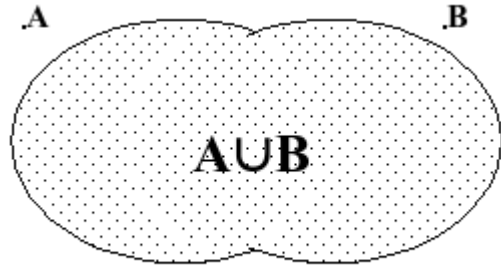
**52** Dato  $H = \{h \mid h \text{ è una lettera della parola MAMMA}\}$  scrivi tutti gli elementi di  $\wp(H)$ .

**53** Dato  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid n < 5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$  scrivi tutti gli elementi di  $\wp(A)$ .

### Insieme unione

Prendiamo l'insieme  $P$  dei numeri pari e l'insieme  $D$  dei numeri dispari; allora l'insieme  $N$  dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi  $P$  e  $D$ .

**DEFINIZIONE.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice **insieme unione** l'insieme  $C$ , composto da tutti gli elementi appartenenti ad  $A$  o a  $B$  o a entrambi. In simboli:  $C=A \cup B$ , si legge " $A$  unito a  $B$ " o " $A$  unione  $B$ ".



Mediante proprietà caratteristica si scrive:

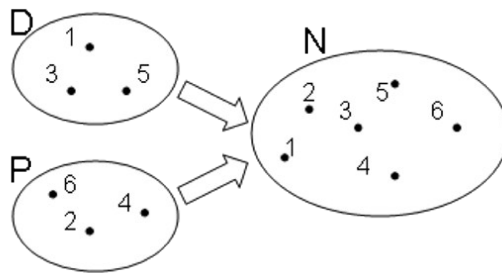
$$C=A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

### Proprietà dell'unione tra insiemi

- |   |   |
|---|---|
| 1. $A \cup B = B \cup A$                                | proprietà                                   |
| <b>commutativa</b> dell'unione                          |   |
| 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$              | proprietà <b>associativa</b> dell'unione    |
| 3. <b>Se</b> $B \subset A$ <b>allora</b> $A \cup B = A$ |   |
| 4. $A \cup \emptyset = A$                               |   |
| 5. $A \cup A = A$                                       | proprietà di <b>idempotenza</b> dell'unione |

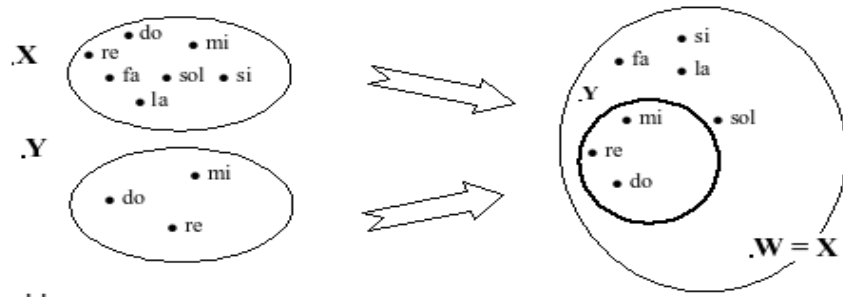
### Esempi

Siano  $D = \{1, 3, 5\}$  e  $P = \{2, 4, 6\}$  allora  $N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



### Esempi

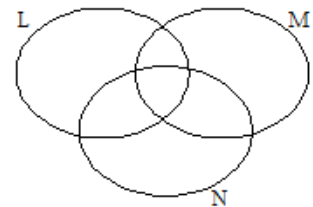
Siano  $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$  e  $Y = \{do, re, mi\}$  allora poiché  $Y \subset X$   
 $W = X \cup Y = X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$



**54** Dati  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$  determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

**55** Dati gli insiemi C delle lettere della parola “GIARDINO” e D delle lettere della parola “ORA” determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

**56** Dati gli insiemi  $L = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $M = \{4, 5, 6, 7, 10\}$ ,  $N = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$  determina l’insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



## Insieme intersezione

### Esempi

Se  $A$  è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e  $B$  è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di  $A$  stanno in  $B$ ? Quali elementi di  $B$  stanno in  $A$ ? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

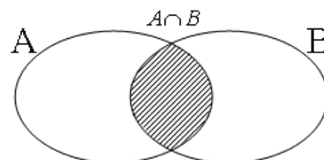
L'insieme degli elementi di  $A$  che stanno in  $B$  è  $\{m, a, t, e, i\}$ .

L'insieme degli elementi di  $B$  che stanno in  $A$  è  $\{m, a, t, e, i\}$ .

L'insieme degli elementi che stanno sia in  $A$  sia in  $B$  è  $\{m, a, t, e, i\}$ .

**DEFINIZIONE.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice insieme **intersezione** di  $A$  e  $B$  l'insieme  $C$ , composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad  $A$  e a  $B$ , ossia comuni a entrambi.  
In simboli:  $C=A \cap B$  che si legge " $A$  intersecato a  $B$ " o " $A$  intersezione  $B$ ".

Mediante proprietà caratteristica si scrive:  $C=A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



Se  $A \cap B = \emptyset$ , ossia se  $A$  e  $B$  non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono **disgiunti**.

### Proprietà dell'intersezione tra insiemi

1.  $A \cap B = B \cap A$  proprietà **commutativa** dell'intersezione
2.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  proprietà **associativa** dell'intersezione
3. Se  $B \subset A$  allora  $A \cap B = B$
4.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
5.  $A \cap A = A$  proprietà di **idempotenza** dell'intersezione
6.  $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

### Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

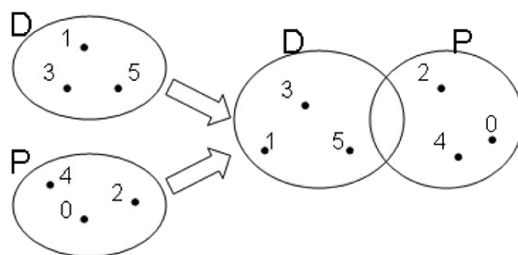
1.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  proprietà **distributiva** dell'intersezione rispetto l'unione
2.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  proprietà **distributiva** dell'unione rispetto l'intersezione

### Esempi

Siano  $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$  e  $Y = \{do, re, mi\}$  allora poiché  $Y \subset X$  si ha:  
 $W = X \cap Y = Y = \{do, re, mi\}$

### Esempi

Siano  $D = \{1, 3, 5\}$  e  $P = \{2, 4, 6\}$  allora  $N = P \cap D = \emptyset$



**57** Dati  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$  determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

**58** Dati gli insiemi  $C$  delle lettere della parola "LIBRO" e  $D$  delle lettere della parola "PASTA" determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

**59** Considerando i 3 insiemi  $S = \{a, b, c, e, f, s, t\}$ ,  $T = \{a, c, g, h, l, s\}$  e  $U = \{b, c, d, g, s, t\}$ , determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

**60** Determina l'intersezione tra i seguenti insiemi

- a)  $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$   $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$   $A \cap B = \dots$
- b)  $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 5\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 7\}$   $B \cap A = \dots$
- c)  $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq +5\}$   $B = \{x \in \mathbb{Z} / -15 \leq x < 3\}$   $A \cap B = \dots$
- d)  $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 100\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 20\}$   $B \cap A = \dots$
- e)  $A = \{l \text{ lettera di SATURNO}\}$   $B = \{l \text{ lettera di NETTUNO}\}$   $A \cap B = \dots$

### Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi  $A$  e  $B$  formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè:  $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,z\}$  e

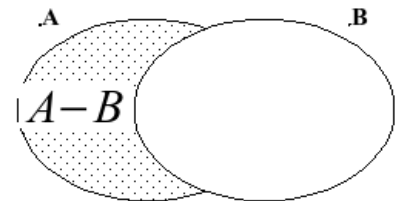
$B=\{b,c,d,f,g,h,l,m,n,p,q,r,s,t,v,z\}$ , le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme  $A$  ma non in  $B$  formano un nuovo insieme chiamato insieme **differenza**.

**DEFINIZIONE.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice insieme **differenza** l'insieme  $C$ , composto da tutti gli elementi di  $A$  che non appartengono a  $B$ . In simboli:  $C=A-B$  che si legge " $A$  differenza  $B$ ".

Mediante proprietà caratteristica si scrive:

$$C=A-B=\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

La rappresentazione mediante diagramma di Eulero-Venn dell'insieme differenza



### Proprietà della differenza tra insiemi

1. Se  $A \cap B = \emptyset$  ossia sono disgiunti allora  $A-B=A$  e  $B-A=B$
2. Se  $B \subset A$  ossia  $B$  è sottoinsieme proprio di  $A$  allora  $B-A=\emptyset$
3.  $A-A=\emptyset$
4.  $A-\emptyset=A$

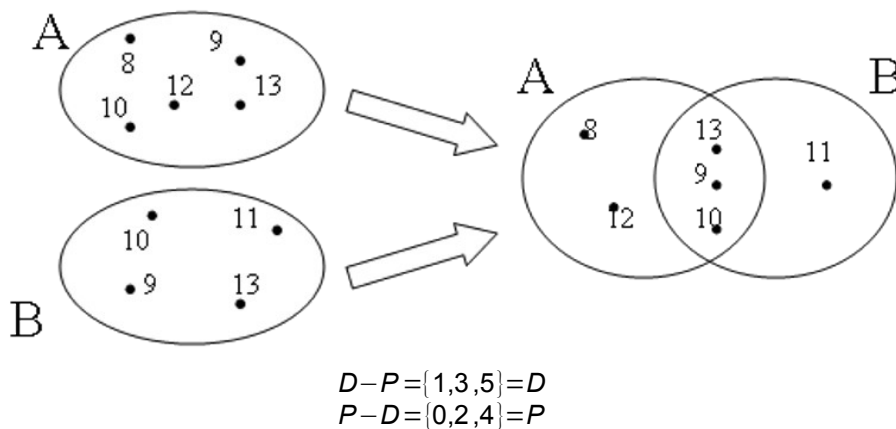
### Esempi

Siano  $A=\{8,9,10,12,13\}$  e  $B=\{9,10,11,13\}$  allora  $C=A-B=\{8,12\}$  e  $D=B-A=\{11\}$

Poiché  $A-B \neq B-A$  nella differenza non vale la proprietà commutativa.

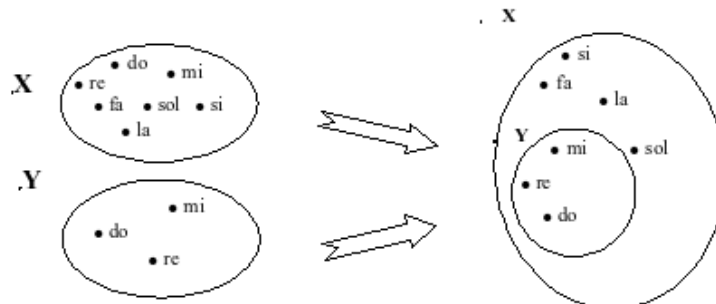
### Esempi

Siano  $D=\{1,3,5\}$  e  $P=\{0,2,4\}$  i due insiemi sono disgiunti  $P \cap D = \emptyset$  allora



### Esempi

Siano  $X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$  e  $Y=\{do, re, mi\}$  allora poiché  $Y \subset X$   
 $W=X-Y=\{fa, sol, la, si\}$



**61** Dati gli insiemi  $E=\{x \mid x \text{ è una lettera della parola "cartellone"}\}$  e  $F=\{x \mid x \text{ è una lettera della parola "martello"}\}$  determina  $E-F$  e  $F-E$ .

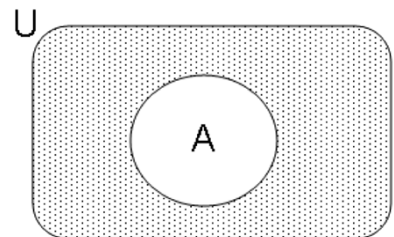
## Insieme complementare

**DEFINIZIONE.** Dato un insieme  $A$ , uno dei possibili insiemi che contengono  $A$  come sottoinsieme si dice **insieme universo** o **insieme ambiente**.

Sia  $W = \{\text{sabato, domenica}\}$  l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per *di*. L'insieme  $W$  può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme  $G$  formato da tutti i giorni della settimana  $G = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}\}$ . L'insieme degli elementi di  $G$  che non appartengono a  $W$  forma un insieme che chiameremo **complementare** di  $W$  rispetto a  $G$ , l'insieme  $G$  invece si dice in questo caso insieme **universo**. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\}$   $\mathbb{N}$  è l'insieme universo di  $A$ .

**DEFINIZIONE.** Dato l'insieme  $A$  e scelto  $U$  come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di  $U$  che non appartengono ad  $A$  si dice **insieme complementare** di  $A$  rispetto a  $U$ . In simboli:  $\bar{A}$  oppure  $\bar{A}_U$  oppure  $C_U A$

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte riempita con puntini è il complementare di  $A$  rispetto a  $U$ , cioè  $\bar{A}_U$ .

Come si può vedere dal disegno, essendo  $A \subseteq U$  il complementare coincide con la differenza tra insiemi:  $\bar{A}_U = U - A$ .

### Esempi

- Il complementare dell'insieme  $D$  dei numeri dispari rispetto all'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali è l'insieme  $P$  dei numeri pari:  $\bar{D}_{\mathbb{N}} = P$ .
- Il complementare dell'insieme  $V$  delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme  $A$  delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme  $C$  delle consonanti:  $\bar{V}_A = C$ .
- Dati gli insiemi  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ , poiché  $B \subseteq \mathbb{N}$  si può determinare  $\bar{B}_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 10\}$ .

**62** Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che:

a)  $\bar{A}_U \cup A = U$

b)  $(A - B) \cup (B - A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$

**63** Dati  $E$  ed  $F$  sottoinsiemi di un insieme  $U$ , l'insieme definito da  $\overline{E \cap F}$  è uguale a:

[A]  $E \cup F$

[B]  $\overline{E \cup F}$

[C]  $E \cap F$

[D]  $\overline{E \cup F}$

**64** Dati  $G$  ed  $H$  sottoinsiemi di un insieme  $U$ , l'insieme definito da  $\overline{G \cup H}$  è uguale a:

[A]  $\overline{G \cap H}$

[B]  $\overline{G \cap H}$

[C]  $\overline{G \cap H}$

[D] nessuno dei precedenti

## Leggi di De Morgan

Dati due insiemi  $A$  e  $B$  ci sono alcune proprietà, dette **leggi di De Morgan**, che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

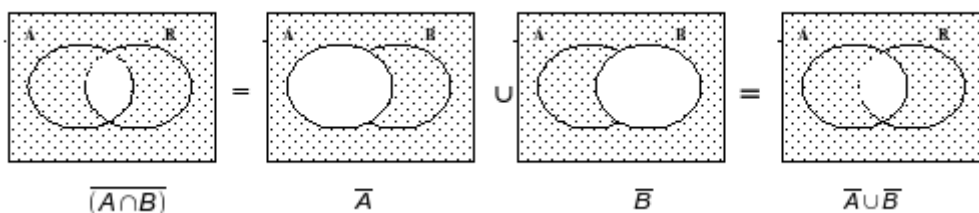
1.  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Prima legge di De Morgan

2.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Seconda legge di De Morgan

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn





### Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce – Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere  $\{3,2\}$  e  $\{2,3\}$  è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una **coppia ordinata** di numeri.

DEFINIZIONE. Un insieme di due elementi  $a$  e  $b$  presi in un certo ordine si dice **coppia ordinata**. Se il primo elemento della coppia è  $a$  ed il secondo è  $b$  si scrive:  $(a, b)$ .

DEFINIZIONE. Dati due insiemi  $A$  e  $B$  non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad  $A$  e il secondo a  $B$ , si chiama **prodotto cartesiano** di  $A$  per  $B$ . In simboli:  $A \times B$  che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive:  $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

Nel caso in cui  $B=A$   $A \times A = A^2 = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$ .

#### Esempi

Sia  $C = \{x, y, z\}$  il prodotto cartesiano  $C \times C$  è dato dalle seguenti coppie ordinate:  
 $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$

### Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

$$A \times \emptyset = \emptyset \qquad \emptyset \times A = \emptyset \qquad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

#### Esempi

Sia  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ , il prodotto cartesiano  $A \times B$  è dato dalle seguenti coppie ordinate:  
 $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$  mentre il prodotto cartesiano  $B \times A$  è dato dalle seguenti coppie ordinate:  $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$ .  
 Si può notare che  $A \times B \neq B \times A$ .

Poiché  $A \times B \neq B \times A$  nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

**65** Sia  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 3\}$ ,  $F = \{x \mid x \text{ è una vocale della parola TELEFONO}\}$  e  $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -6\}$  allora

$$E = \{1, \dots\} \qquad F = \{e, \dots\} \qquad G = \{\dots\}$$

$$E \times F = \{(1; e), \dots\} \qquad F \times E = \{(e; 1), \dots\}$$

$$F \times G = \{\dots\} \qquad G \times E = \{\dots\}$$

**66** Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano  $A \times B$ , dove  $A$  ha 6 elementi,  $B$  ne ha 3:

- [A] 9                      [B] 18                      [C] 6                      [D] Non si può sapere

**67** Sapendo che  $E \times F = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z)\}$  indica gli elementi di  $E$  e di  $F$ :  
 $E = \{\dots\}$                        $F = \{\dots\}$

**68** Se  $A \times B$  ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti  $A$  e  $B$ ?

- [A] 1; 5                      [B] 3; 2                      [C] 6; 1                      [D] 2; 3

**69** Dati gli insiemi  $A = \{3, 5, 6\}$  e  $B = \{-2, 1\}$  costruisci il diagramma cartesiano di  $A \times B$  ed elencane gli elementi.

**70** Dato  $A = \{0, 1, 2\}$  calcola  $A \times A$

## Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

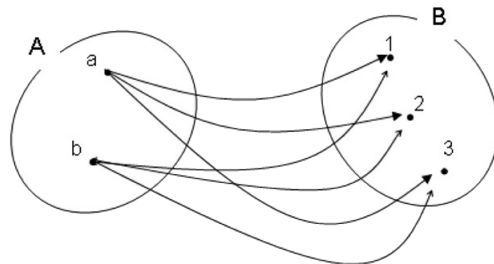
### ■ Tabulazione delle coppie ordinate

Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di  $A$  con tutti gli elementi di  $B$ , il secondo elemento di  $A$  con tutti gli elementi di  $B$  e così via fino ad esaurire tutti gli elementi di  $A$ .

$$A \times B = \{(a;1), (a;2), (a;3), (b;1), (b;2), (b;3)\}$$

### ■ Diagramma a frecce

Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.



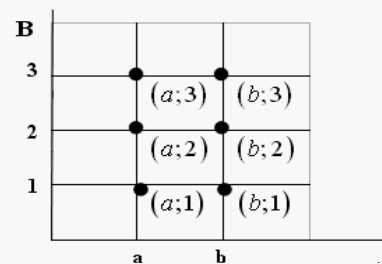
### ■ Tabella a doppia entrata

Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

A \ B	1	2	3
a	(a;1)	(a;2)	(a;3)
b	(b;1)	(b;2)	(b;3)

### ■ Diagramma cartesiano

Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate **assi cartesiani**. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

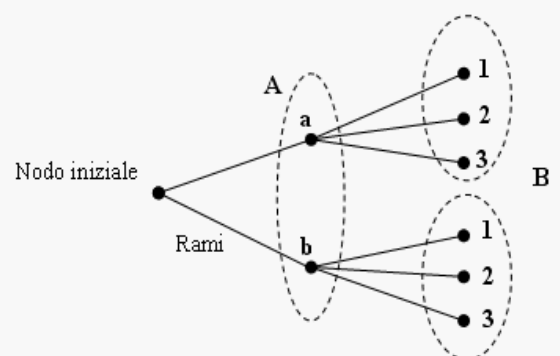


### ■ Diagramma ad albero

È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.

Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

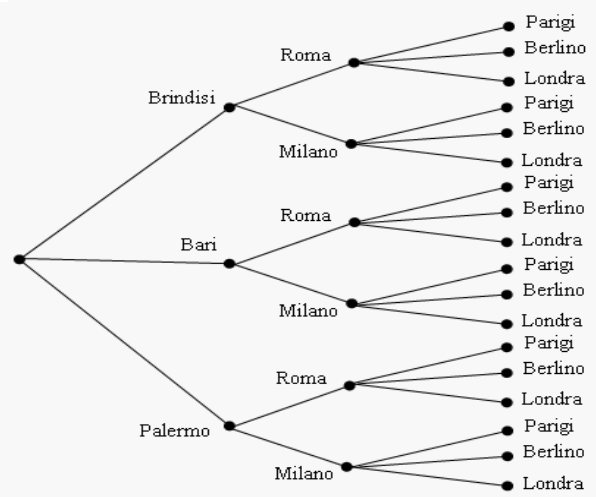
La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



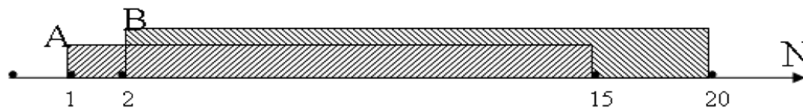
## Esempi

Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia  $P = \{\text{Brindisi, Bari, Palermo}\}$  l'insieme delle città di partenza,  $S = \{\text{Roma, Milano}\}$  l'insieme delle città di scalo e

$A = \{\text{Parigi, Berlino, Londra}\}$  l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi  $P \times S \times A$ . Rappresentiamo  $P \times S \times A$  tramite un diagramma ad albero:



**71** Siano  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 20\}$  .



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

- [A]  $A \subset B$                       [B]  $B \supset A$                       [C]  $A = B$                       [D]  $B \neq A$

**72** Siano  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari e } (1 \leq x \leq 20)\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 6 e } (2 \leq x \leq 18)\}$

Quale affermazione è vera?

- [A]  $A \subset B$                       [B]  $B \supset A$                       [C]  $A = B$                       [D]  $B \subset A$

**73** Siano  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 10\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 20\}$  .

Quali delle seguenti affermazioni è vera:

- [A]  $A \subset B$                       [B]  $B \supset A$                       [C]  $A = B$                       [D]  $A \neq B$

**74** Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme  $C = \{a, e, i, o, u\}$

**75** Sia  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di  $A$ .

**76** Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica. Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.

$M \subset P$

$P \supseteq M$

$M \subseteq (M \cup P)$

$M \not\subset P$

$P \subset (P \cup M)$

$M \neq P$

[a] [b] [c] [d] [e]

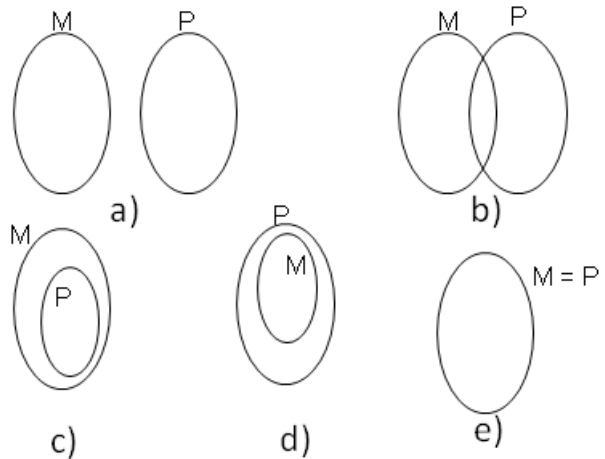
[a] [b] [c] [d] [e]

[a] [b] [c] [d] [e]

[a] [b] [c] [d] [e]

[a] [b] [c] [d] [e]

[a] [b] [c] [d] [e]



**77** Determina l'unione tra i seguenti insiemi

a)  $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$   $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$   $A \cup B = \dots$

b)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$   $A \cup B = \dots$

c)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq +5\}$   $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq x < 3\}$   $A \cup B = \dots$

d)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$   $A \cup B = \dots$

e)  $A = \{l \text{ lettera di SATURNO}\}$   $B = \{l \text{ lettera di NETTUNO}\}$   $A \cup B = \dots$

**78** Sia  $M_3$  l'insieme dei multipli 3 e  $M_4$  l'insieme dei multipli di 4, in generale  $M_n$  l'insieme dei multipli del numero n.

a) Calcola  $M_3 \cap M_4$  . Si tratta di M... l'insieme dei multipli di ...

b) Calcola  $M_6 \cap M_4$  . Si tratta di M... l'insieme dei multipli di ...

c) Calcola  $M_{60} \cap M_{48}$  .

d) Sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli  $M_m \cap M_n$  ? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

**79** Sia  $D_4$  l'insieme dei divisori di 4 e  $D_6$  l'insieme dei divisori di 6, in generale  $D_n$  l'insieme dei divisori del numero n.

a) Calcola  $D_4 \cap D_6$  . Si tratta di D... l'insieme dei divisori di ...

b) Calcola  $D_{60} \cap D_{48}$  .

c) Sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli  $D_m \cap D_n$  ? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

**80**  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \frac{3}{2}\}$  e  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 6\}$  , calcola  $A \cap B = \dots$

**81**  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 0\}$  e  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$  , calcola  $A \cap B = \dots$

**82**  $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -5 < x < 10\}$  e  $B = \left\{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\right\}$ , calcola  $A \cap B = \dots$

**83**  $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x < 10\}$  E  $B = \left\{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x \leq 6\right\}$ , calcola  $A \cap B = \dots$

**84** Dato l'insieme  $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32\}$  e il suo sottoinsieme  $B$  dei multipli di 3, determina gli insiemi  $A-B$  e  $B-A$ .

**85** Dato l'insieme  $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 100\}$  e  $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid 10 < y < 100\}$  determina  $X - Y$  e  $Y - X$ .

**86** Determina la differenza tra i seguenti insiemi

a)  $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$   $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$   $A - B = \dots$

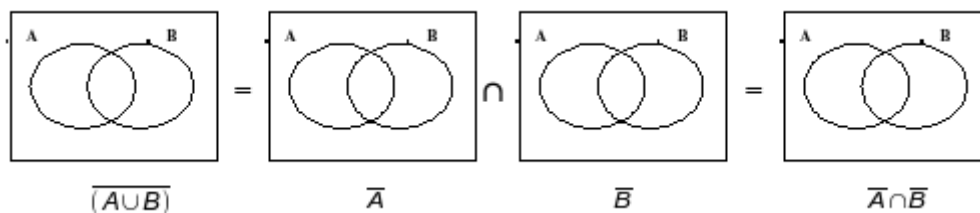
b)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$   $B - A = \dots$

c)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq +5\}$   $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq x < 3\}$   $A - B = \dots$

d)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$   $B - A = \dots$

e)  $A = \{l \text{ lettera di SATURNO}\}$   $B = \{l \text{ lettera di NETTUNO}\}$   $A - B = \dots$

**87** Dimostra la 2° legge di De Morgan annerendo gli spazi opportuni



**88** Dati gli insiemi  $C$  e  $D$  tali che  $C \subset D$  completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a)  $D - C = \dots$

c)  $\overline{C \cap D} = \dots$

e)  $C - D = \dots$

b)  $D \cap \overline{C} = \dots$

d)  $C \cup \overline{C} = \dots$

f)  $C \cap \overline{C} = \dots$

**89** Quale delle seguenti scritte corrisponde a  $\overline{X \cap Y}$  :

a.  $\overline{X} \cup \overline{Y}$

b.  $\overline{X} \cap \overline{Y}$

c.  $\overline{X} \cup Y$

d.  $X \cup \overline{Y}$

**90** Esegui le operazioni indicate

- |    | A   | B  | $A \cup B$ | $A \cap B$ | $A - B$ |
|----|---|--|------------|------------|---------|
| a) | $A = \{2, 4, 6, 8\}$  | $B = \{1, 3, 6, 9\}$   |            |            |         |
| b) | $A = \{a, e, i, o, u\}$                                     | $B = \{a, b, c, d, e\}$  |            |            |         |
| c) | $A = \emptyset$   | $B = \{0\}$  |            |            |         |
| d) | $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$            | $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari}\}$            |            |            |         |
| e) | $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 2}\}$   | $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 4}\}$      |            |            |         |
| f) | $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$            | $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 8\}$               |            |            |         |
| g) | $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è lettera di casa}\}$ | $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è lettera di caserma}\}$ |            |            |         |

Dato  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 2}\}$  determina  $C_{\mathbb{N}}A$

**91** Dato  $A = \{I, II, III\}$  e  $B = \{a, b\}$  determina  $A \times B$

**92** Dato  $B = \{1, 2, 3\}$  calcola  $(B \cup B) \cap B$

**93**  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$  calcola  $A \cap B$ ;  $A \cup C$ ;  $(A \cap B) \cup C$ ;  $B \cap C$ ;  $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ .

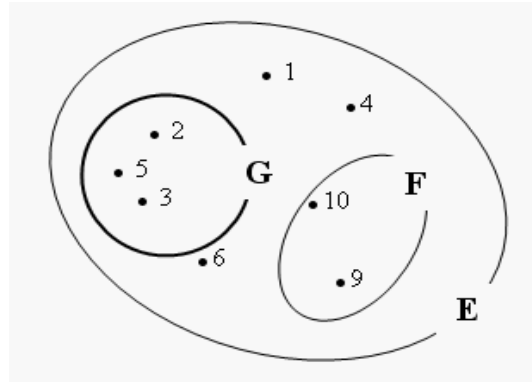
**94**  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < x \leq 2\}$  calcola  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B - A$ ,  $C_A B$ ,  $A \times (A \cap B)$ ,  $\emptyset \cap (B - A)$

**95** Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio

- $A \cup B = A$
- $A \cap B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset$
- se  $x$  è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4
- Se  $Card A = 2$  e  $Card B = 5$  allora  $Card A \cup B = 7$
- Se  $Card A = 2$  e  $Card B = 5$  allora  $Card A \cap B = 2$

**96** In base alla figura rispondi alle domande:

- a) L'insieme E ha 5 elementi [V] [F]
- b)  $2 \in E$  [V] [F]
- c)  $3 \notin G$  [V] [F]
- d)  $F \subset G$  [V] [F]
- e)  $F \subset E$  [V] [F]
- f)  $\emptyset \subseteq G$  [V] [F]
- g)  $\text{Card}(E)=8$  [V] [F]
- h)  $10 \in E$  [V] [F]
- i)  $F \cap E = F$  [V] [F]
- j)  $F \cup G = E$  [V] [F]
- k)  $(E - F) - G = \{1, 4\}$  [V] [F]



**97** Dato l'insieme  $A = \{0; 1; 5; 6; 9\}$  stabilisci quali dei

seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

- $B = \{1; 5; 6\}$  B ..... A
- $C = \{0; 1; 3; 5\}$  C ..... A
- $D = \{ \}$  D ..... A
- $E = \{0\}$  E ..... A
- $F = \{5; 6; 7\}$  F ..... A
- $G = \{6; 0; 1; 5; 9\}$  G ..... A

**98** Siano dati i seguenti insiemi

$C = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola REMARE}\}$ ,  $D = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola VOLARE}\}$ ,  
 $E = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola AMARE}\}$ , indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

- [A]  $D \subseteq C$       [B]  $D \not\subseteq E$       [C]  $C = E$       [D]  $E \supseteq C$

**99** Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli ..... a, b, c, d
$a \in A$	L'elemento a ..... all'insieme A
.....	L'elemento f non appartiene all'insieme A
$B \subset A$	L'insieme B è ..... nell'insieme A, ovvero B è un ..... di A
.....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A
.....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B.
$D = A \cap B$	L'insieme D è ..... degli insiemi A e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi ..... cioè non hanno .....
$L = C_A B$	L'insieme L è .....
.....	L'insieme M è la differenza tra A e B.

**100** Rappresenta graficamente l'insieme  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 25 \text{ e } x \text{ è pari}\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27 \text{ e } x \text{ è multiplo di } 4\}$  e stabilisci se  $A \supseteq B$

**101** Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se  $A \subset B$  e  $B \subset C$  allora  $A \subset C$ . Le relazioni valgono anche se il simbolo  $\subset$  viene sostituito con  $\subseteq$ ?

**102** Dato  $A = \{do, re, mi\}$  determina l'insieme delle parti  $\wp(A)$

**103** Considerato l'insieme  $X = \{a, c, d, t, o\}$  stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a)  $\{x \mid x \text{ è una vocale della parola CAROTA}\} \subset X$  [V] [F]
- b)  $\{a, t\} \notin \wp(X)$  [V] [F]
- c)  $\{a, t\} \in \wp(X)$  [V] [F]
- d)  $0 \in X$  [V] [F]
- e)  $\emptyset \in \wp(X)$  [V] [F]
- f)  $X \in \wp(X)$  [V] [F]

**104** Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?



**119**  $A = \{x / x \text{ è divisore di } 12\}$ ,  $B = \{x / x \text{ è divisore di } 6\}$ ,  $C = \{x / x \text{ è divisore di } 15\}$ , determina

- a)  $A \cup B$     b)  $A \cup C$     c)  $A \cup B \cup C$     d)  $A \cap B$   
 e)  $B \cap C$     f)  $A \cap C$     g)  $A \cap B \cap C$     h)  $A \cap (B \cup C)$

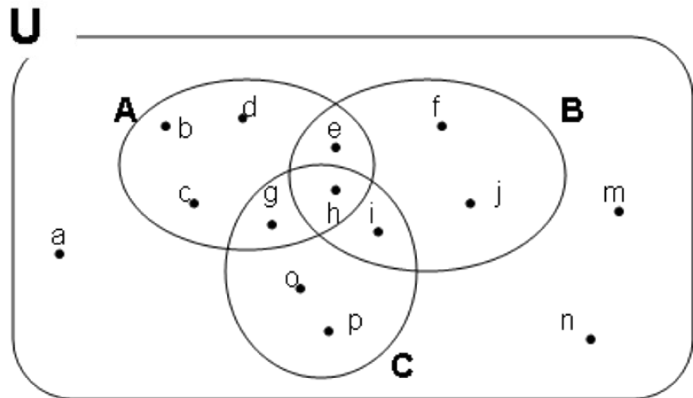
**120** Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

**121** Dato l'insieme  $U = \{x / x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 5\}$

- a) rappresenta  $U$  in forma tabulare;  
 b) costruisci due sottoinsiemi propri  $A$  e  $B$  di  $U$  tali che  $A \cap B = \emptyset$  ;  
 c) determina  $A \cup B$  e  $A - B$ , dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

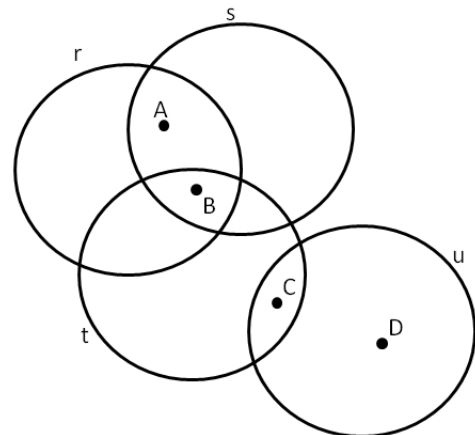
**122** In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

- a)  $\frac{A \cup B}{A \cup B \cup C}$   
 b)  $\frac{A \cup B \cup C}{A \cup B \cup C}$   
 c)  $A \cap B$   
 d)  $B \cap C$   
 e)  $A \cap B \cap C$   
 f)  $A \cap (B \cup C)$   
 g)  $A \cup (B \cap C)$   
 h)  $B \cap \bar{C}$   
 i)  $(A \cup B) - C$   
 j)  $B \cap \bar{C}$   
 k)  $\frac{C - (A \cap B)}{(A \cup B) - C}$   
 l)  $\frac{A \cup B}{(A \cup B) - C}$



**123** Determina l'insieme  $P(A)$  insieme delle parti di  $A$ , dove  $A$  è l'insieme delle lettere della parola NONNA.

**124** Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi  $r, s, t$  sono rette, gli elementi  $A, B, C, D$  sono punti. Dai una rappresentazione geometrica, rappresentando le rette che corrispondono alla seguente situazione.

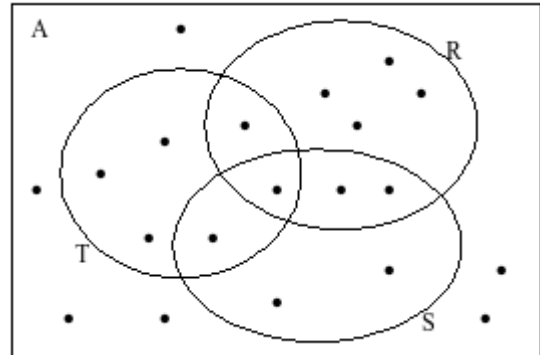


## ► 5. I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

### Problema 1

Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme  $A$  rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi  $T$ ,  $R$ ,  $S$  rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.



Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano

- 1) **nessuno** dei balli indicati?
- 2) **almeno uno** dei balli tango, samba, rumba?
- 3) **almeno** il samba?
- 4) **solo** la rumba?
- 5) **la rumba e il tango**?
- 6) **tutti** i balli indicati?

Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno cioè  $\text{Card}(A) = 20$

Rispondiamo ora alla seconda domanda:

- 1) Quanti tra loro ballano **nessuno** dei balli indicati?

Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme  $A$ , ma in nessuno degli insiemi  $R$ ,  $S$ ,  $T$  quindi appartiene al complementare di  $R \cup S \cup T$  rispetto all'insieme  $A$ , dunque  $\text{Card}(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$ .

- 2) Quanti tra loro ballano **almeno uno** dei balli tra tango, samba, rumba?

Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme  $R \cup S \cup T$ , quindi  $\text{Card}(R \cup S \cup T) = 14$ .

- 3) Quanti tra loro ballano **almeno** il samba?

Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme  $S$ , quindi  $\text{Card}(S) = 6$

- 4) Quanti tra loro ballano **solo** la rumba?

Nell'insieme  $R$  sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme  $R$  gli elementi che stanno in  $S$  o in  $T$ :  $\text{Card}(R - (T \cup S)) = 4$

- 5) Quanti tra loro ballano **la rumba e il tango**?

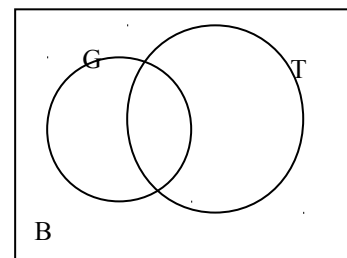
Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione  $R \cap T$ , quindi  $\text{Card}(R \cap T) = 2$

- 6) Quanti tra loro ballano **tutti** i balli indicati?

Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione  $R \cap S \cap T$ , quindi  $\text{Card}(R \cap S \cap T) = 1$ .

### Problema 2

A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?



Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con  $B$  l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con  $G$  l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con  $T$  l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che

$$\text{Card}(G) = 7; \text{Card}(G \cap T) = 3; \text{Card}(T - G) = 3; \text{Card}(B - (G \cup T)) = 2$$

Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.



**Problema 3**

Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati:

$$P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}; C = \{\text{iscritti a calcio}\}; \text{Card}(P) = 15; \text{Card}(C) = 28$$

Obiettivo:

Il problema chiede di determinare la cardinalità di  $P \cup C$

Soluzione:

Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi  $P$  e  $C$  sono disgiunti:  $P \cap C = \emptyset$ . Quindi:

$$\text{Card}(P \cup C) = \text{Card}(P) + \text{Card}(C) = 15 + 28 = 43$$

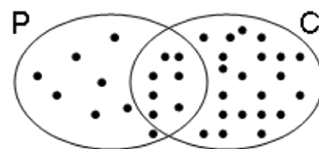
**Problema 4**

Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?

Dati:

$$P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}; C = \{\text{iscritti a calcio}\}$$

$$\text{Card}(P) = 15; \text{Card}(C) = 28; \text{Card}(P \cap C) = 7$$



Obiettivo:

Il problema chiede di determinare la cardinalità di  $P \cup C$

Soluzione:

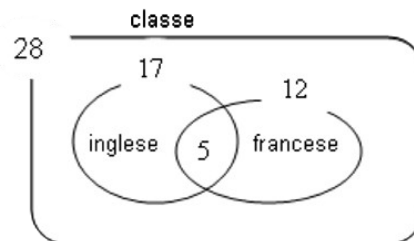
$$\text{Card}(P \cup C) = \text{Card}(P) + \text{Card}(C) - \text{Card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$$

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti  $A$  e  $B$  la cardinalità dell'insieme  $A \cup B$  è data dalla seguente formula:  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ .

**Problema 5**

A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso NON sono  $17 + 12 = 29$ , perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono  $17 + 12 - 5 = 24$ . Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono  $28 - 24 = 4$ .



**Problema 6**

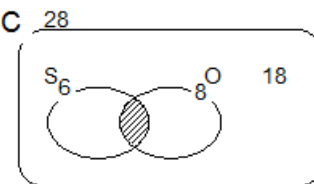
Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficenze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.  $C$  è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi.  $S$  è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni.  $O$  è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi. Gli elementi di  $\overline{S \cup O}$  sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.

L'insieme  $S \cup O$  è quindi costituito da  $28 - 18 = 10$  elementi. Ricordiamo che  $\text{Card}(S \cup O) = \text{Card}(S) + \text{Card}(O) - \text{Card}(S \cap O)$ , pertanto

$$\text{Card}(S \cap O) = \text{Card}(S) + \text{Card}(O) - \text{Card}(S \cup O) = 6 + 8 - 10 = 4$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

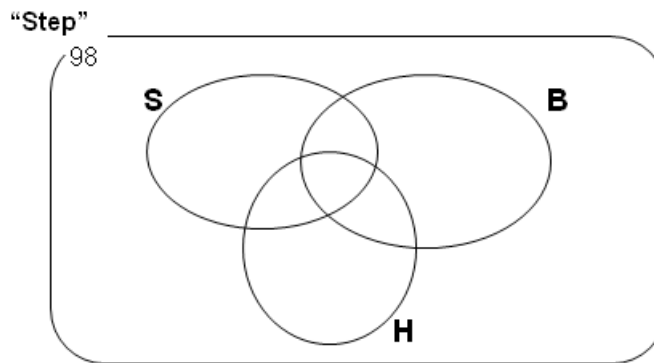


**125** La scuola “Step” organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

- Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98:
- 6 frequentano tutti e tre i corsi,
- 37 frequentano il corso di Salsa,
- 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop,
- 7 solo i corsi Salsa e Break Dance,
- 9 almeno Hip Hop e Break Dance.
- 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.



S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, B l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

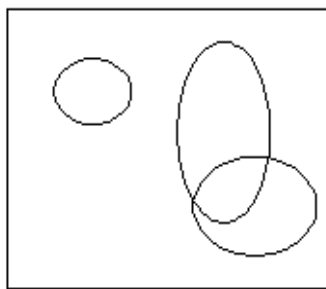
**126** Il club “Argento vivo” ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

**127** In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:

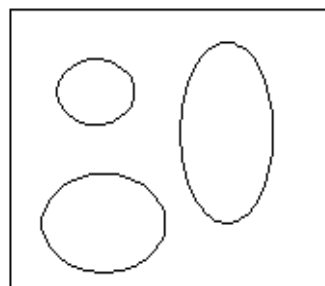
- che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
- iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
- che frequentano il corso di violino sono 46;
- che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? (R:3)

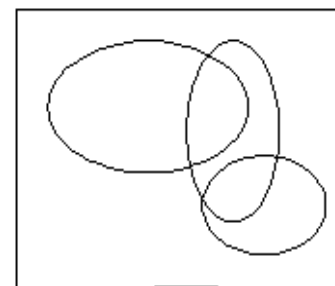
Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



A



B



C

**128** I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno anche cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia? [R: 22]

**129** Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

- a) Quante persone bevono una sola bevanda? [R:1048]  
 b) Quante bevono almeno una bevanda? [R: 1279]  
 c) Quante sono le persone intervistate? [R: 1350]

**130** In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco?

[R: 36; 84]

**131** In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 10 non frequentano nessun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanto allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

**132** In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn, assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

**133** In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

**134** Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurricolari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo.

Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni? (*Test di ammissione a architettura 2008*)

- [A] 13                      [B] 9                      [C] 16                      [D] 22                      [E] 6

**135** In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale  $N$  degli studenti è:

(*Test di ammissione a medicina 2008*)

- [A]  $N > 14$               [B]  $N < 14$               [C]  $N > 22$               [D]  $N = 22$               [E]  $N \geq 14$

**136** In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

**137** In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

**138** In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

### La parte rimanente del capitolo è solo on line, gli argomenti che completano il capitolo sono

▶ 6. Proposizioni e predicati.....	122
▶ 7. Relazioni in un insieme.....	122
▶ 8. Proprietà delle relazioni.....	125
▶ 9. Relazioni di equivalenza.....	129
▶ 10. Relazioni di ordine.....	132
▶ 11. Corrispondenze tra insiemi.....	135
▶ 12. Funzioni o applicazioni.....	141
▶ 13. La retta e gli insiemi numerici.....	147
▶ 14. Il metodo delle coordinate cartesiane.....	149
▶ 15. Il grafico di una funzione.....	154
▶ 16. Particolari relazioni d'equivalenza.....	165
▶ 17. Insiemi finiti e insiemi infiniti.....	172



sinteticamente che la proposizione avente come soggetto  $a$ , come complemento  $b$  ed  $\mathcal{R}$  come predicato, scriviamo  $a \mathcal{R} b$  e diremo sinteticamente che  $a$  è in relazione con  $b$ .

**Esempio**

Con riferimento all'esempio precedente si ha:  $A = \{3,5,6,9,30\}$   $\mathcal{R}$  : "essere multiplo di"  
 allora scriviamo: per qualunque  $a$  e  $b$  appartenenti ad  $A$ ,  $a \mathcal{R} b$  se e solo se  $a$  è multiplo di  $b$   
 in particolare:  
 $30 \mathcal{R} 6$  ;  $9 \mathcal{R} 3$  ;  $30 \mathcal{R} 3$  ;  $6 \mathcal{R} 3$  ;  $30 \mathcal{R} 5$  ;  $3 \mathcal{R} 3$  ;  $5 \mathcal{R} 5$  ;  $6 \mathcal{R} 6$  ;  $9 \mathcal{R} 9$  ;  $30 \mathcal{R} 30$   
 Abbiamo così formato un insieme di **coppie ordinate** di elementi tra loro in relazione:  
 $30 \mathcal{R} 5$  può anche essere indicata con  $(30,5)$ .

**DEFINIZIONE.** Chiamiamo **insieme della relazione** (in simboli  $G_{\mathcal{R}}$ ) l'insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano dell'insieme  $A$  con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo  $G_{\mathcal{R}} = \{(a, b) \in A \times A \mid a \mathcal{R} b\}$ .

**141** Nell'insieme  $A$  rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn introduciamo il predicato  $\mathcal{R}$  : "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme  $G_{\mathcal{R}}$ .

*Traccia di soluzione:*

per costruire l'insieme  $G_{\mathcal{R}}$  devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque  $a$  e  $b$  appartenenti ad  $A$ ,  $a \mathcal{R} b$  se e solo se " $a$  ha una sola lettera diversa da  $b$ ", ad esempio  $prete \mathcal{R} prese$ .



**142** Nell'insieme  $C = \{\text{Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno}\}$  è introdotta la relazione  $\mathcal{R}$  : "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme  $G_{\mathcal{R}}$ .

**143** Nell'insieme  $S = \{x \mid x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$  è introdotta la relazione

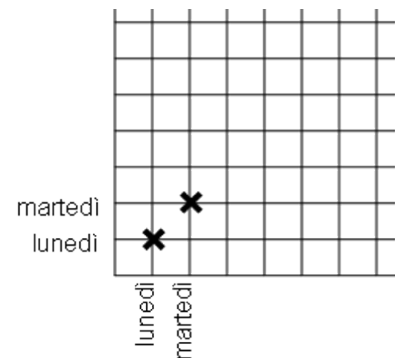
$\mathcal{R} : x \in S, y \in S, x \mathcal{R} y$  se e solo se " $x$  ha lo stesso numero di sillabe di  $y$ ". Costruisci l'insieme  $G_{\mathcal{R}}$ .

**144** Nell'insieme  $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$  è introdotta la relazione  $\mathcal{R}$  "essere consecutivi". Costruisci l'insieme  $G_{\mathcal{R}}$ .

**Grafico di una relazione**

**145** Considera l'insieme  $S = \{x \mid x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$ , completa la rappresentazione grafica dell'insieme  $S \times S$ , evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme  $G_{\mathcal{R}}$  determinato dalla relazione " $x$  ha lo stesso numero di sillabe di  $y$ ".

**146** Considera l'insieme  $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$ ; fai la rappresentazione grafica dell'insieme  $F \times F$  e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme  $G_{\mathcal{R}}$  determinato dalla relazione "essere consecutivi".



Dal momento che una relazione in un insieme  $Y$  determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $Y \times Y$  è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano.  
**Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un grafico cartesiano.**

**Matrice o tabella di una relazione**

Nella figura accanto è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto), indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia  $(D,5)$  indica la cella annerita.

	1	2	3	4	5	6	7
A							
B							
C							
D							
E							
F							

**147** Considera nell'insieme  $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$  la relazione  $\mathcal{R} : x \in A, y \in A, x \mathcal{R} y$  se e solo se "x è concorde con y". Costruiamo una tabella a doppia entrata riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A.

Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

se  $a \mathcal{R} b$

metti 1 nella cella (a,b)

altrimenti

metti 0 nella cella (a,b)

	-1	+3	-7	+5	-2	+4	+10
-1	1						
+3							
-7							
+5			0				
-2							
+4							
+10							

Prosegui tu seguendo l'esempio.

Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La

relazione  $\mathcal{R}$  è completamente rappresentata. La tabella costruita si chiama **matrice della relazione**.

**Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.**

**148** Nell'insieme  $S = \{x / x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$  è introdotta la relazione

$\mathcal{R} : x \in S, y \in S, x \mathcal{R} y$  se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Rappresenta la relazione con una matrice.

**149** Assegnato il predicato  $\mathcal{R}$  "essere divisibile per" introdotto nell'insieme  $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ , rappresenta con una matrice la relazione  $\mathcal{R}$ .

### Grafo di una relazione

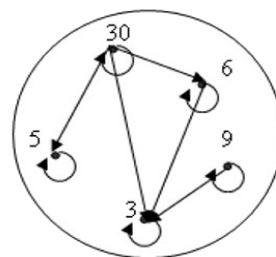
**DEFINIZIONE.** Un **grafo** è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

#### Esempi

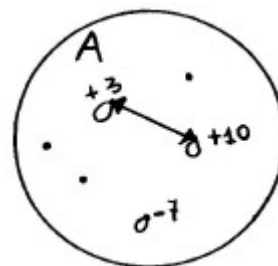
Nel diagramma di Eulero-Venn dell'insieme  $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$  rappresentiamo la relazione  $R =$  "essere multiplo di" collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizioni vere.

Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una **freccia** all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un **anello o cappio** per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento a dell'insieme A la proposizione: "a è multiplo di a".



**150** Completa la rappresentazione con frecce della relazione  $\mathcal{R} : x \in A, y \in A, x \mathcal{R} y$  se e solo se "x è concorde con y" nell'insieme  $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ .

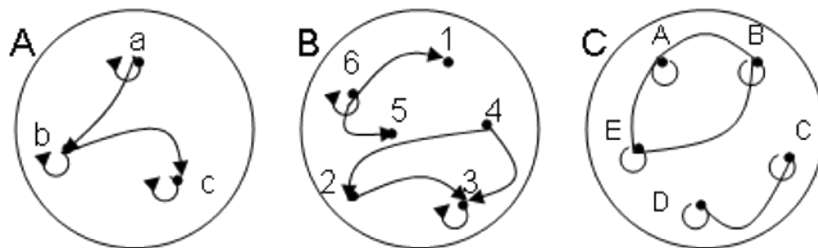
Nel completare il disegno dell'esercizio precedente hai dovuto utilizzare una freccia con due punte, infatti le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Quando si ha questo caso si può omettere la punta della freccia utilizzando un **arco** che collega gli argomenti del predicato.



**Una relazione può essere rappresentata attraverso un grafo.**

**151** Nell'insieme  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  è introdotto il predicato  $R$ : "essere il doppio"; costruisci l'insieme  $G_R$ , rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

**152** Sono assegnati i grafi di tre relazioni  $R_1, R_2, R_3$  introdotte in altrettanti insiemi  $A, B, C$ ; deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme  $G_R$



**153** Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione  $R$ : "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme  $C$  degli alunni della tua classe.

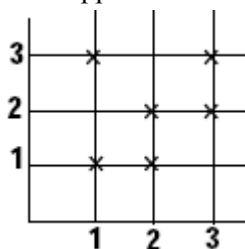
**154** Nell'insieme  $H = \{x \in \mathbb{N} / 21 < x < 40\}$ ,  $x \mathcal{R} y$  se e solo se "la somma delle cifre di  $x$  è uguale alla somma delle cifre di  $y$ ". Costruisci  $G_R$  e rappresenta la relazione con una matrice.

Scegli la risposta corretta:

**155** Una relazione  $R$  introdotta in un insieme  $A$  determina:

- [A] un sottoinsieme di  $A$       [B] l'insieme  $A \times A$       [C] un insieme di coppie  
 [D] un grafico cartesiano      [E] un sottoinsieme di  $A \times A$

**156** Rappresenta con un grafo la relazione  $R$  rappresentata nel grafico cartesiano



## ► 8. Proprietà delle relazioni

### Proprietà riflessiva

#### Esempi

Nell'insieme  $T = \{7, 8, 12, 34, 100\}$  è introdotta la relazione  $R$ : "essere divisore di".

Puoi osservare che ogni numero è divisore di se stesso, cioè ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso. Una relazione di questo tipo si dice che gode della proprietà riflessiva.

Osserva però che nell'insieme  $N$  dei numeri naturali la relazione "essere divisibile" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  gode della **proprietà riflessiva** quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia **per qualunque  $x$  dell'insieme  $A$  si ha  $x \mathcal{R} x$** .

**157** Quali relazioni sono riflessive?

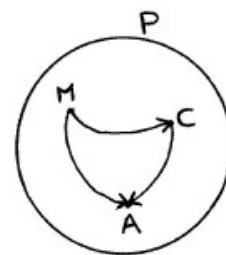
Insieme	relazione	è riflessiva?	
Numeri naturali	essere divisibile per	[SI]	[NO]
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere parallela a	[SI]	[NO]
Poligoni	avere lo stesso numero di lati	[SI]	[NO]
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	[SI]	[NO]
Parole italiane	essere il plurale di	[SI]	[NO]

### Proprietà antiriflessiva

#### Esempi

Nell'insieme delle persone  $P = \{\text{Marco, Antonio, Carlo}\}$  è data la relazione  $R$ : "essere più alto" rappresentata con il grafo a fianco.

Puoi notare che nessun elemento è in relazione con se stesso. In effetti nessuno può "essere più alto" di se stesso.



**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  gode della **proprietà antiriflessiva** quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia **per nessun elemento  $x$  di  $A$  si ha  $x \mathcal{R} x$** .

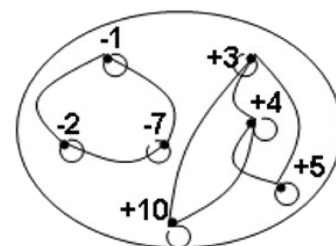
**158** Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

Insieme	relazione	è antiriflessiva?	
Numeri naturali	essere multiplo di	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI]	[NO]
Poligoni	avere lo stesso perimetro	[SI]	[NO]
Città del Piemonte	avere più abitanti di	[SI]	[NO]
Parole italiane	essere il femminile di	[SI]	[NO]
Fiumi italiani	essere affluente	[SI]	[NO]
Persone	essere figlio di	[SI]	[NO]

### Proprietà simmetrica

#### Esempi

Nel grafo è rappresentata la relazione  $R$ : "essere concorde" nell'insieme dei numeri  $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ ; per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Per questa relazione si può osservare che se un elemento dell'insieme è in relazione con un altro allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo:



$-1 \mathcal{R} -7$  ma anche  $-7 \mathcal{R} -1$  ;  $+3 \mathcal{R} +5$  ma anche  $+5 \mathcal{R} +3$  , e così via.

**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$  introdotta in un insieme  $A$  gode della **proprietà simmetrica** quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e complemento; ossia **per qualunque  $x$  e  $y$  appartenenti all'insieme  $A$  se vale  $x \mathcal{R} y$  allora vale anche  $y \mathcal{R} x$** .

**159** Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	relazione	è simmetrica?	
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI]	[NO]
Solidi	avere lo stesso volume	[SI]	[NO]
Persone	essere il padre di	[SI]	[NO]
Persone	essere fratello o sorella di	[SI]	[NO]
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre di	[SI]	[NO]
Fiumi d'Europa	essere affluente	[SI]	[NO]
Numeri interi	essere il quadrato di	[SI]	[NO]

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

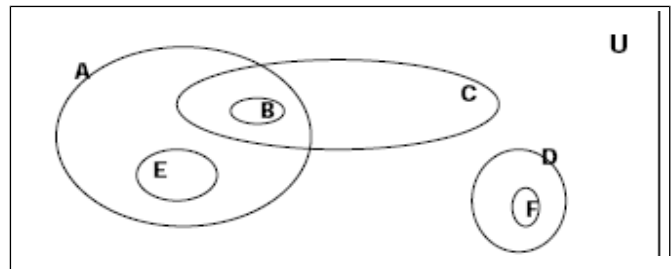
- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio +25 è il quadrato di +5), non è vero che +5 è il quadrato di +25.



### Proprietà antisimmetrica

#### Esempi

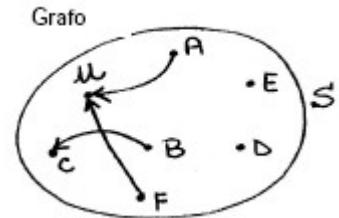
Il diagramma di Venn in figura rappresenta un insieme  $U$  e alcuni suoi sottoinsiemi.



Consideriamo ora l'insieme di insiemi

$$S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$$

e la relazione  $R$ : "essere sottoinsieme proprio di"; completa il grafo della relazione.



Certamente nel completare il grafo non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$  introdotta in un insieme  $A$  gode della **proprietà antisimmetrica** quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia **per qualunque  $x$  e  $y$  dell'insieme  $A$  se  $x \neq y$  e  $x \mathcal{R} y$  non è vero che  $y \mathcal{R} x$** .

#### 160 Riconosci le relazioni antisimmetriche

Insieme	relazione	è antisimmetrica?	
Numeri naturali	essere divisibile per	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI]	[NO]
Poligoni	avere lo stesso perimetro	[SI]	[NO]
Angoli	essere complementare a	[SI]	[NO]
Città del Lazio	essere nella stessa provincia di	[SI]	[NO]

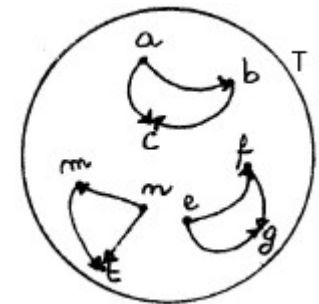
### Proprietà transitiva

#### Esempi

Nel grafo a lato è rappresentata una relazione  $R$  introdotta in un insieme  $T$ .

Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di  $(a R b \text{ e } b R c)$  segue la verità di  $a R c$ .

Analizzando gli altri elementi e la relazione  $R$ , possiamo osservare che essendo vera  $(e R f \text{ e } f R g)$  è vera anche  $e R g$ ; inoltre si ha che essendo vera  $(n R m \text{ e } m R t)$  è vera anche  $n R t$ .



Dal grafo di una relazione transitiva puoi osservare che le terne di elementi in relazione costituiscono i vertici di un triangolo; non è facile invece individuare la proprietà transitiva dalle altre rappresentazioni grafiche.

**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$  introdotta in un insieme  $A$  gode della **proprietà transitiva** quando se  $a \mathcal{R} b$  e  $b \mathcal{R} c$  allora risulta anche  $a \mathcal{R} c$ , con  $a, b, c$  elementi qualsiasi dell'insieme  $A$ .

**161** Verifica se, nell'insieme  $N$  dei numeri naturali, la relazione  $R$ : "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta  $R$  con un grafo:

da  $18 R 50$  e  $50 R \dots$  segue  $\dots R \dots$   
 da  $\dots R 555$  e  $\dots R 267$  segue  $\dots R \dots$

**162** Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	relazione	è transitiva?	
numeri naturali	essere multiplo di	[SI]	[NO]
regioni d'Italia	essere più a nord di	[SI]	[NO]
numeri interi	essere minore di	[SI]	[NO]
rette del piano	essere perpendicolari	[SI]	[NO]
persone	essere padre di	[SI]	[NO]
stati d'Europa	confinare con	[SI]	[NO]

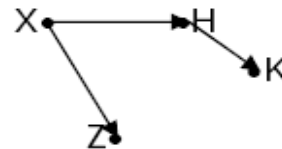
**163** Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme  $H = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 12\}$  ; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	0:4	1:4	2:4										12:4
resto	0	1											0

Introduciamo in H la relazione  $x \mathcal{R} y$  se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4".  
Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione  $\mathcal{R}$  introdotta nell'insieme dei numeri naturali N è una relazione transitiva?

**164** Completa il grafo in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva:

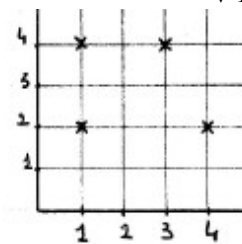


**165** Quale proposizione è falsa?

- a) se una relazione è simmetrica, all'insieme  $G_R$  appartengono le coppie del tipo (a,b) e (b,a). V F
- b) il grafico cartesiano è un modo per rappresentare una relazione. V F
- c) la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente. V F
- d) la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente. V F
- e) se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica. V F
- f) se  $(x, y) \in G_R$  e  $(y, z) \in G_R$  qualche volta si ha  $(x, z) \in G_R$  V F
- g) se  $(x, y) \in G_R$  si ha sempre  $(y, x) \in G_R$  V F
- h) una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento V F
- i) una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A V F
- j) una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times A$  V F

**166** Con riferimento al grafico cartesiano disegnato di lato, quale è vera?

- [A] nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio
- [B] la relazione è antisimmetrica
- [C] la relazione è transitiva
- [D] l'insieme  $G_R$  è costituito dalle coppie (1,2) (1,4) (3,4) (4,2)
- [E] la relazione gode della proprietà simmetrica e riflessiva



**167** Quali proprietà verificano le seguenti relazioni?

$R =$  riflessiva;  $AR =$  antiriflessiva;  $S =$  simmetrica;  $AS =$  antisimmetrica;  $T =$  transitiva

	Insieme	relazione	proprietà
a)	poligoni del piano	avere lo stesso numero di lati	R-AR-S-AS-T
b)	numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre	R-AR-S-AS-T
c)	numeri naturali	essere minore di	R-AR-S-AS-T
d)	numeri naturali	essere divisibile per	R-AR-S-AS-T
e)	$A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 5\}$	essere multiplo di	R-AR-S-AS-T

## ► 9. Relazioni di equivalenza

### Esempi

Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

relazione	insieme	proprietà
a) Avere lo stesso perimetro	poligoni	[Ri] [Si] [Tr]
b) Essere fratello di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
c) Essere figlio di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
d) Essere più alto di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
e) Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[Ri] [Si] [Tr]
f) Iniziare con la stessa lettera	parole	[Ri] [Si] [Tr]
g) Giocare nella stessa squadra	calciatori	[Ri] [Si] [Tr]
h) $(a, b) \mathcal{R} (x, y)$ se e solo se $a+b=x+y$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[Ri] [Si] [Tr]

### Svolgimento

La relazione a) gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti

- "il poligono p ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (proprietà Riflessiva);
- "il poligono  $p_1$  ha lo stesso perimetro del poligono  $p_2$ " implica la verità della proposizione "il poligono  $p_2$  ha lo stesso perimetro di  $p_1$ ", qualunque siano i due poligoni  $p_1$  e  $p_2$  (proprietà Simmetrica);
- se "il poligono  $p_1$  ha lo stesso perimetro di  $p_2$ " e " $p_2$  ha lo stesso perimetro di  $p_3$ " allora si ha anche che " $p_1$  ha lo stesso perimetro di  $p_3$ ", qualunque siano i poligoni  $p_1, p_2, p_3$  (proprietà Transitiva).

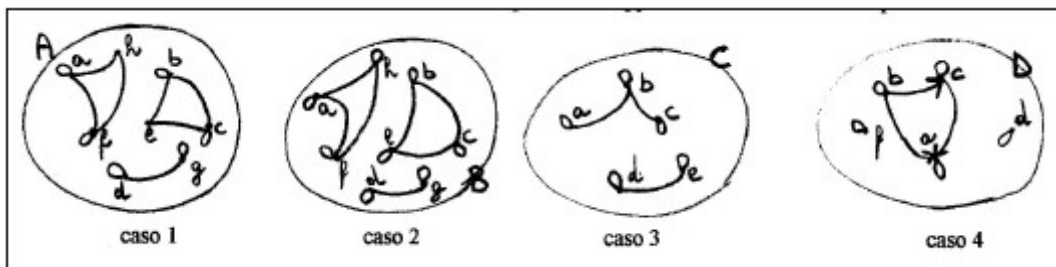
Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà **Riflessiva, Simmetrica, Transitiva**, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

**DEFINIZIONE.** Chiamiamo **relazione d'equivalenza** la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

**168** Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

relazione	insieme	è d'equivalenza?	
a) essere multiplo	numeri naturali	[V]	[F]
b) avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	[V]	[F]
c) essere minore	interi relativi	[V]	[F]
d) vincere	squadre di calcio	[V]	[F]
e) avere lo stesso numero di angoli	poligoni	[V]	[F]
f) essere il plurale	parole italiane	[V]	[F]
g) essere il cubo	numeri italiani	[V]	[F]

**169** Analizza i seguenti grafi e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:



- Nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché .....
- Nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà ....., il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà ....., infine terne di elementi sono vertici di ..... e quindi la relazione gode della proprietà .....

In conclusione .....

- La relazione del caso 3 non gode della proprietà ..... pertanto .....
- Nel caso 4 sussistono le proprietà ..... e ....., ma non la proprietà ..... pertanto la relazione .....

**Esempi**

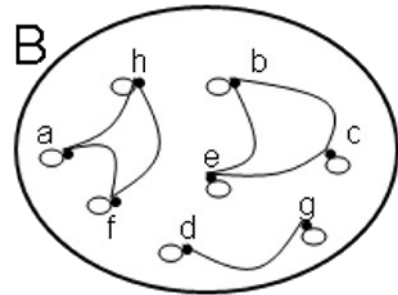
Dato l'insieme  $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:

**ripeti**

scegliamo a caso un elemento di  $B$ ;

formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;

**finché** non abbiamo esaurito tutti gli elementi.

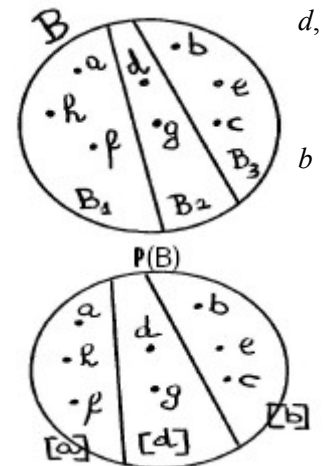


**Svolgimento**

- Scegliamo l'elemento  $a$ , formiamo il sottoinsieme avente come elementi  $a, h, f$  che con  $a$  sono in relazione:  $B_1 = \{a, h, f\}$ .

Gli elementi dell'insieme  $B$  non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.

- Scegliamo  $g$  e formiamo il sottoinsieme  $B_2$  avente come elementi  $g$  e l'unico che con esso è in relazione:  $B_2 = \{g, d\}$ .  
Gli elementi dell'insieme  $B$  non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.
- Scegliamo  $c$  e formiamo il sottoinsieme  $B_3$  avente come elementi  $c, e$ , che con esso sono in relazione:  $B_3 = \{c, e, b\}$ .



Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato.

Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme  $B$ , che hanno queste particolari caratteristiche

- nessuno è vuoto,
- a due a due sono disgiunti,
- la loro unione è l'insieme  $B$ .

Premettiamo le definizioni:

**DEFINIZIONE.** Determinare una **partizione di un insieme  $X$**  significa suddividere l'insieme stesso in un numero finito di sottoinsiemi  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , detti **classi**, tali che

- 1) nessun sottoinsieme è vuoto,
- 2) a due a due sono disgiunti,
- 3) la loro unione è l'insieme  $X$ .

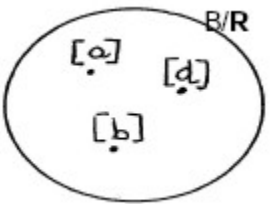
La **partizione di  $X$**  è l'insieme i cui elementi sono le classi  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , e viene indicato con  $P(X) = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ .

**DEFINIZIONE.** Quando in un insieme  $A$  è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama **classe d'equivalenza** ogni sottoinsieme di  $A$  contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare una **partizione dell'insieme  $A$  in classi d'equivalenza** ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di  $B$  indicati con  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[d]$ ; la partizione dell'insieme  $B$  in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn a fianco disegnato.

**DEFINIZIONE.** Si chiama **insieme quoziente** di un insieme  $A$  rispetto a una relazione di equivalenza  $R$ , l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione  $R$ . L'insieme quoziente si indica con il simbolo  $A/R$ .

Nel caso dell'esempio precedente si passa all'insieme quoziente  $B/R$  del seguente diagramma di Eulero-Venn:



**Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza  $R$  in un insieme  $A$ , possiamo stabilire la seguente catena di passaggi :**

**insieme  $A \rightarrow$  partizione  $P(A) \rightarrow$  insieme quoziente  $A/R$**

**170** Fissa l'attenzione sulla relazione  $R$ : "frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme  $S$  degli alunni iscritti nella tua scuola.

Verifica che  $R$  è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione  $P(S)$  in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente  $S/R$ .

**171** Studia in  $N$  la relazione  $R$ : "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- Quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- Da quanti elementi è costituito l'insieme  $N/R$ ?
- Qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

**172** Considera la relazione  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme  $N$  e studiane le proprietà.

- E' una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente  $N/R$ .
- Quante classi d'equivalenza hai formato?
- Puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- Giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in  $N$  dell'insieme dei numeri dispari"?

**173** Considera l'insieme  $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 20\}$  e i suoi sottoinsiemi

$A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$ ;  $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ ;  $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$ ;  $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

1. Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme  $A$ ?
3. È vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di  $A$  aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
4. Quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

**174** Nell'insieme  $N$  dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione  $R$ : "x  $R$  y se e solo se x ha le stesse cifre di y".

**175** Nell'insieme  $C$  degli alunni della tua classe verifica se la relazione  $R$ : "x  $R$  y se e solo se il cognome di x ha la stessa lettera iniziale del cognome di y" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme  $C$  e l'insieme quoziente  $C/R$ .

**176** Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione  $x R y$  se e solo se x ha lo stesso numero di lettere di y è una relazione di equivalenza. In caso affermativo individua alcune classi di equivalenza.

**177** Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione  $x R y$  se e solo se x e y hanno almeno tre lettere in comune. Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

**178** Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "x  $R$  y se e solo se x e y hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individua quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivalenza [1] e [10].

**179** Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "x  $R$  y se e solo se x+y è dispari" è una relazione di equivalenza.

**180** Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione "x  $R$  y se e solo se x e y hanno almeno 3 lettere in comune" è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

**181** Sia  $S$  un insieme non vuoto in cui è definita una relazione  $R$  riflessiva e transitiva; in  $S$  si definisca la relazione  $\#$  ponendo, per ogni  $x, y$  appartenenti a  $X$ ,  $x\#y$  se e solo se  $xRy$  e  $yRx$ . Verificare che  $\#$  è relazione di equivalenza in  $X$ .

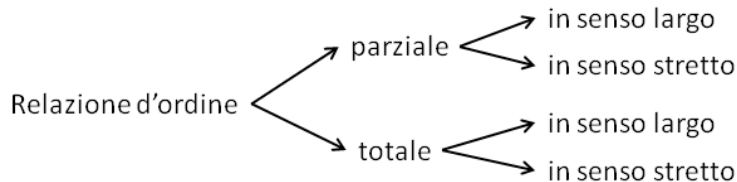
## ► 10. Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili.

Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

**DEFINIZIONE.** Una relazione  $\mathcal{R}$ , introdotta in un insieme  $A$ , si chiama **relazione d'ordine** se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:



Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la

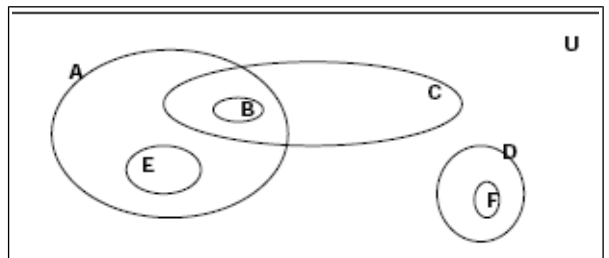
**DEFINIZIONE.** Data una relazione  $\mathcal{R}$  d'ordine in un insieme  $A$ , **due elementi distinti**  $x$  e  $y$  sono **confrontabili** se rispetto ad  $\mathcal{R}$  si ha  $x\mathcal{R}y$  oppure  $y\mathcal{R}x$ .

### Esempio

In base al diagramma il diagramma di Eulero-Venn a fianco introduciamo nell'insieme di insiemi

$S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$

la relazione  $R$ : "essere sottoinsieme di".



Ricordiamo che, dati due insiemi  $X$  e  $Y$ ,  $X$  è sottoinsieme di  $Y$  quando ogni elemento di  $X$  appartiene a  $Y$ ; in simboli

$X \subseteq Y$  e si legge  $X$  è contenuto in  $Y$  o  $X$  è uguale a  $Y$ .

Vogliamo studiare le proprietà della relazione  $R$ .

1. Poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che  $R$  è riflessiva.
2. Se  $X \subseteq Y$  e  $X \neq Y$  allora  $Y \not\subseteq X$  quindi  $R$  è una relazione antisimmetrica.
3. Se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq Z$  allora  $X \subseteq Z$  quindi  $R$  è una relazione transitiva.

Inoltre si mette chiaramente in evidenza che esistono almeno due elementi dell'insieme  $S$  che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio  $A \not\subseteq D$  e  $D \not\subseteq A$ , ossia  $A$  e  $D$  non sono confrontabili.

**Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale** (si dice parziale perché almeno due elementi non sono confrontabili), **in senso largo** (perché la relazione gode anche della proprietà riflessiva).

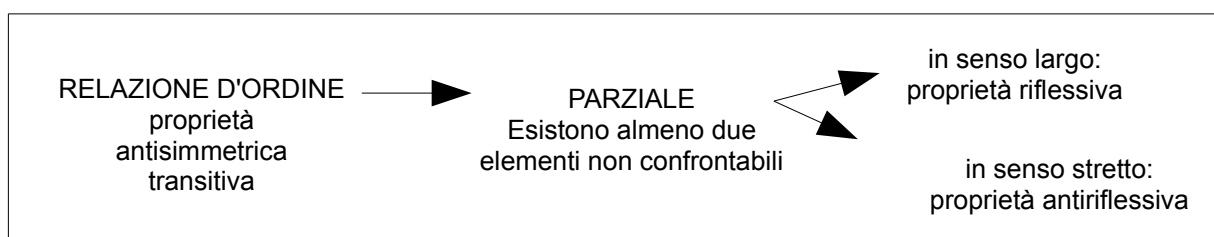
**182** Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell'esempio precedente e introduciamo nell'insieme  $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$  la relazione  $R$ : "essere sottoinsieme proprio di". Studiamo le proprietà di questa relazione.

Cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente? .....

Sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva? .....

Esistono elementi di  $S$  non confrontabili? .....

**Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale** (esistono almeno due elementi che non sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva).



**183** Nell'insieme  $M = \{1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6\}$  viene introdotta la relazione  $R$  così definita: “ $xRy$  se e solo se  $y - x$  appartiene a  $\mathbb{N}$ ”.

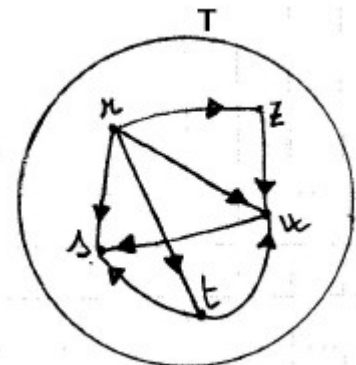
La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

**Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale** (due qualsiasi elementi si possono mettere in relazione, cioè sono confrontabili), **in senso largo** (la relazione gode della proprietà riflessiva).

**184** E' assegnata la relazione  $R$  nell'insieme  $T$ , rappresentata col grafo.

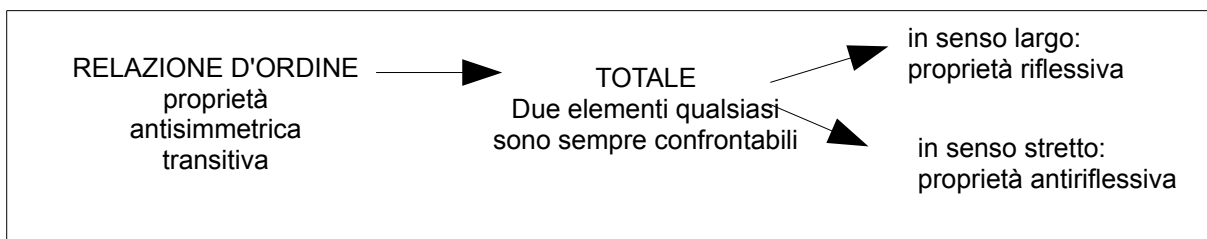
Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- La relazione è riflessiva? ... ..
- La relazione è antisimmetrica? ... ..
- La relazione è transitiva? ... ..
- Due elementi distinti sono sempre confrontabili? ... ..



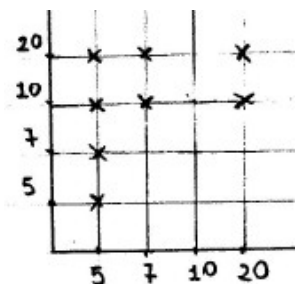
Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell'insieme  $T$  è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva; infine scelti due elementi qualsiasi dell'insieme  $T$ , essi sono sempre confrontabili.

**Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale** (due qualsiasi elementi sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva).



**185** Verifica che la relazione  $R$ : “essere divisore” introdotta nell'insieme  $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$  è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

**186** Perché la relazione  $R$  assegnata con il grafico cartesiano riportato a lato, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.



**187** Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione  $R$ : “ $xRy$  se e solo se l'altezza di  $x$  non supera l'altezza di  $y$ ”.

È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

**188** Nell'insieme  $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$  la relazione  $R$ : “essere divisibile” è una relazione d'ordine? Se lo è di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto.

**189** Nell'insieme  $\mathbb{N} - \{0\}$  la relazione “essere divisibile” è d'ordine totale in senso largo?

**190** Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?

**191** L'insieme  $G_R$  di una relazione introdotta nell'insieme  $A = \{a, b, c, d, e\}$  è  $G_R = \{(a,a); (a,b); (b,b); (d,d); (c,d); (d,e); (e,e)\}$ ; quale delle seguenti affermazioni è vera

- [A]  $R$  è una relazione antiriflessiva
- [B]  $R$  è una relazione solo antisimmetrica
- [C]  $R$  è una relazione riflessiva
- [D]  $R$  è una relazione transitiva e antisimmetrica

**192** La relazione  $R$ : “essere vicini di banco” inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

**193** I tre sottoinsiemi  $A_1 = \{36, 135, 432\}$ ;  $A_2 = \{65\}$ ;  $A_3 = \{66, 3522, 93, 435\}$  dell'insieme  $A = \{36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522\}$  costituiscono una partizione dell'insieme  $A$ ? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme?  $A_1, A_2, A_3$  sono classi d'equivalenza?

**194** Nell'insieme  $\mathbb{N}$  la relazione  $R$ : “ $xRy$  se e solo se  $x \cdot y$  è un numero dispari” è d'equivalenza?

**195** La relazione  $R : "x R y \text{ se e solo se } x \text{ sta nella stessa nazione di } y"$  nell'insieme

**196**  $K = \{\text{Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione}\}$

**197** è d'equivalenza? Costruisci  $A/R$ . Verifica se la relazione  $R$  assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme  $A = \{\square, \diamond, \infty, \nabla\}$  e l'insieme quoziente  $A/R$ .

	$\square$	$\diamond$	$\infty$	$\nabla$
$\square$	1	1	0	0
$\diamond$	1	1	0	0
$\infty$	0	0	1	1
$\nabla$	0	0	1	1

**198** In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- I° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- II° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- III° giorno: A vince contro C; B vince contro D

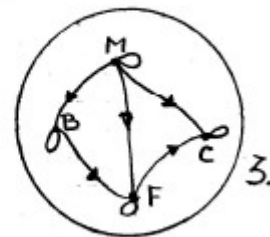
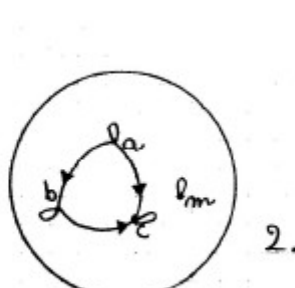
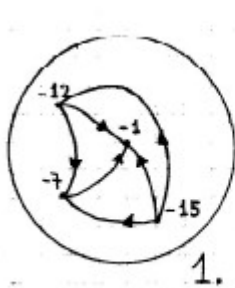
Il IV giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

**199** Associa a ciascun grafo la corretta relazione d'ordine:

a) d'ordine totale largo;

b) d'ordine totale stretto;

c) d'ordine parziale largo

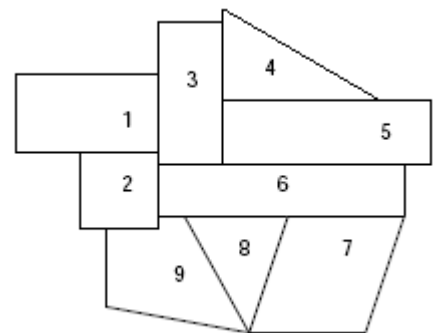


**200** Nell'insieme di tutti gli iscritti a Facebook determina le proprietà della relazione  $R : "x R y \text{ se e solo se il numero di amici di } x \text{ supera il numero di amici di } y"$ . È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

**201** Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione " $x R y$  se e solo se  $x$  ha più lettere di  $y$ " è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

**202** Nell'insieme dei numeri naturali, verifica se la relazione " $x R y$  se e solo se  $x$  ha un numero di cifre maggiore del numero di cifre di  $y$ " è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

**203** Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare questo modello, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore. Come si può risolvere il problema?



*Traccia di soluzione:*

*Nell'insieme  $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  studia la relazione  $R : "confinare con",$  rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. [Risposta: 3]*

*La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.*



## ► 11. Corrispondenze tra insiemi

### Prime definizioni

Ti proponiamo due semplici esercizi per introdurre l'argomento che qui vogliamo trattare.

**204** Quando camminiamo per la strada della nostra città, vediamo tanti segnali lungo il percorso che, attraverso simboli, ci danno informazioni sul comportamento corretto che dobbiamo tenere.

Sia  $A = \{\text{segnali stradali della figura sotto}\}$  e  $B = \{\text{descrizione del segnale}\}$ . Come nell'esempio, collega con una freccia un segnale stradale con il suo significato.



**205** In occasione dei giochi olimpici del 2008, artisti cinesi hanno interpretato graficamente alcuni sport tracciando i simboli riprodotti in figura.

Tra questi alcuni sono evidenziati con lettere dell'alfabeto (a,b,c,d,e). Sia  $F = \{a, b, c, d, e\}$  e  $K$  il predicato binario: "rappresenta graficamente".

Scrivi tutte le proposizioni vere che puoi formare prendendo come soggetto del predicato  $K$  un elemento di  $F$  e come complemento un elemento dell'insieme degli sport  $S = \{\text{corsa, pallacanestro, tennis, tiro con l'arco, sollevamento pesi}\}$

come nell'esempio:

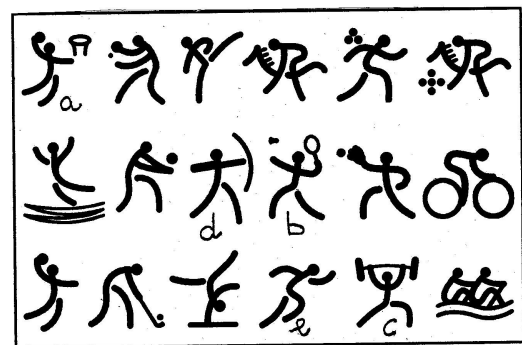
Il simbolo *e* rappresenta graficamente la corsa

Il simbolo *a* .....

Il simbolo .....

Il simbolo .....

Il simbolo .....



In entrambi gli esercizi, hai formato coppie ordinate associando ad un elemento del primo insieme un elemento del secondo insieme mediante il predicato binario enunciato.

**DEFINIZIONE.** Si chiama **corrispondenza  $K$  tra due insiemi  $A$  e  $B$** , il predicato binario avente come soggetto un elemento di  $A$  e come complemento un elemento di  $B$ . Essa definisce un sottoinsieme  $G_K$  del prodotto cartesiano  $A \times B$ , costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:

$$G_K = \{(a, b) \in A \times B \mid a K b\}$$

### Osservazione

Nel capitolo precedente abbiamo chiamato relazione un predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme; la differenza di terminologia sta semplicemente nella sottolineatura del fatto che si considerano appartenenti allo stesso insieme oppure appartenenti a due insiemi diversi il soggetto e il complemento del predicato binario enunciato.

A seconda del contesto in cui analizziamo un predicato binario, parleremo di corrispondenza o di relazione. Nelle pagine che seguono tratteremo di corrispondenze, mettendo in luce le loro caratteristiche.

**DEFINIZIONE.** Si chiama **dominio D** di una corrispondenza l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato **K**; **codominio C** l'insieme degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Per indicare in linguaggio matematico che si è stabilita una corrispondenza tra due insiemi A e B scriviamo:

$$k: A \rightarrow B \text{ "predicato" oppure } K: A \xrightarrow{K:\text{predicato}} B$$

Formalizziamo i primi 2 esercizi di questo capitolo:

$$k: A \rightarrow B \text{ "significare", oppure } A \xrightarrow{K:\text{significare}} B ; \text{ dominio } A; \text{ codominio } B$$

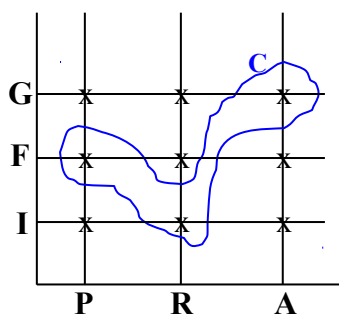
$$k: F \rightarrow S \text{ "rappresentare graficamente", oppure } F \xrightarrow{K:\text{rappresentare graficamente}} S \text{ dominio } F; \text{ codominio } S.$$

**DEFINIZIONE.** Definita una corrispondenza  $k: A \rightarrow B$ , nella coppia (a,b) di elementi corrispondenti, **b** si chiama **immagine di a nella corrispondenza K**. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio è un sottoinsieme del Codominio chiamato **insieme Immagine**. Verrà indicato con **IM** e  $IM \subseteq C$ .

## Rappresentazione di una corrispondenza

### Esempio

Consideriamo gli insiemi:  $A = \{\text{Parigi, Roma, Atene}\}$  e  $B = \{\text{Italia, Francia, Grecia}\}$ ; il prodotto cartesiano  $A \times B$  è rappresentato col grafico cartesiano (i suoi elementi sono segnati con le crocette in nero).



Esso è formato dalle 9 coppie ordinate aventi come primo elemento una città (elemento di A) e come secondo elemento uno stato d'Europa (elemento di B).

Il predicato binario **K**: "essere la capitale di", introdotto nell'insieme  $A \times B$ , determina il sottoinsieme  $G_K$  i cui elementi sono le coppie (Parigi, Francia); (Roma, Italia); (Atene, Grecia).

Il dominio della corrispondenza è  $D = \{\text{Parigi, Roma, Atene}\}$  e il codominio è  $C = \{\text{Italia, Francia, Grecia}\}$  e  $IM = C$ .

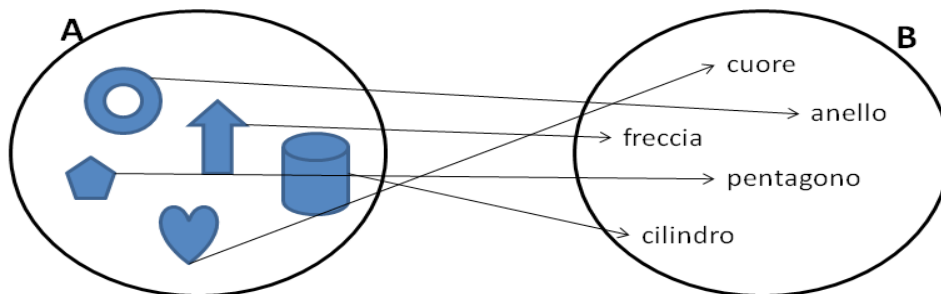
### Rappresentare una corrispondenza con un grafico cartesiano

**206** Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza **K**: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme  $A = \{\text{Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama, }\}$  e codominio l'insieme  $B = \{1901, 1564, 1961, 1879, 1769, 1920, 1768\}$ . Rappresenta per elencazione il sottoinsieme  $G_K$  del prodotto cartesiano  $A \times B$ . Stabilisci infine gli elementi dell'immagine **IM**.

**207** L'insieme  $A = \{\text{casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione}\}$  è il codominio della corrispondenza **K**: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è  $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$ . Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme  $G_K$ , scrivi per elencazione l'insieme **IM**.

### Esempio

Nella figura sottostante sono rappresentati gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn;



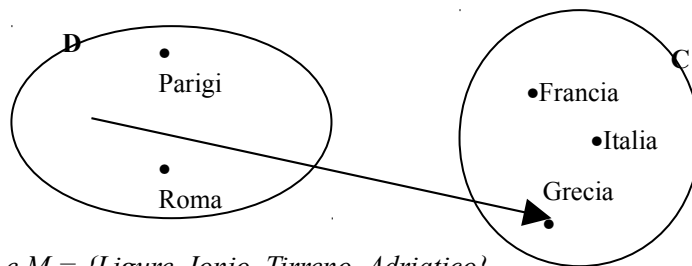
Collegando con una freccia, ciascun elemento di A con la sua forma, possiamo rappresentare con un grafico sagittale la corrispondenza **K**: "essere di forma" tra gli insiemi assegnati.

**A** risulta essere il **Domínio** e **B** il **Codominio** della corrispondenza;  $IM = C$ . La freccia che collega ogni elemento del dominio con la sua immagine rappresenta il predicato **K**.

### Rappresentare una corrispondenza con un grafico sagittale

**208** Completa la rappresentazione con grafico sagittale della corrispondenza “essere capitale di”.

La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato  $K$ : “essere la capitale di”.



#### Esempio

Consideriamo gli insiemi  $R = \{\text{regioni d'Italia}\}$  e  $M = \{\text{Ligure, Ionio, Tirreno, Adriatico}\}$  e la corrispondenza  $k : R \rightarrow M$  “essere bagnata/o da”;  $R$  è il **D**ominio e  $M$  il **C**odominio di questa corrispondenza.

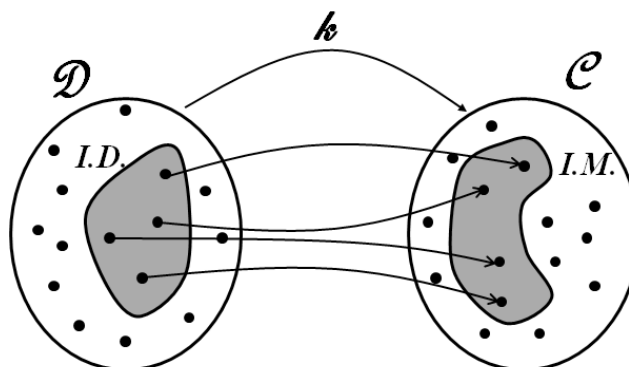
L'insieme  $G_K$  delle coppie ordinate aventi come primo elemento una regione e come secondo elemento un mare è:

$G_K = \{(\text{Liguria, Ligure}); (\text{Toscana, Tirreno}); (\text{Lazio, Tirreno}); (\text{Campania, Tirreno}); (\text{Basilicata, Tirreno}); (\text{Calabria, Tirreno}); (\text{Calabria, Ionio}); (\text{Puglia, Ionio}); (\text{Puglia, Adriatico}); (\text{Molise, Adriatico}); (\text{Abruzzo, Adriatico}); (\text{Emilia-Romagna, Adriatico}); (\text{Marche, Adriatico}); (\text{Veneto, Adriatico}); (\text{Friuli Venezia Giulia, Adriatico})\}$ .

Se rappresentiamo questa corrispondenza con un grafico sagittale notiamo che non tutti gli elementi del **D**ominio hanno l'immagine in  $K$ . La corrispondenza definita si può generare solo in un sottoinsieme del **D**ominio.

**DEFINIZIONE.** Chiamiamo **Insieme di Definizione** della corrispondenza, indicato con **I.D.**, il sottoinsieme del **D**ominio i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel **C**odominio.

Nel grafico è rappresentata una generica situazione formatasi dall'aver definito una corrispondenza tra due insiemi; sono in grigio l'**I**nsieme di **D**efinizione, sottoinsieme del **D**ominio e l'**I**nsieme **I**Mmagine, sottoinsieme del **C**odominio.



Osserviamo che in alcuni casi si ha la coincidenza del **D**ominio con l'**I**nsieme di **D**efinizione e la coincidenza del **C**odominio con l'insieme **I**Mmagine:  $D=I.D.$  e  $C=I.M.$

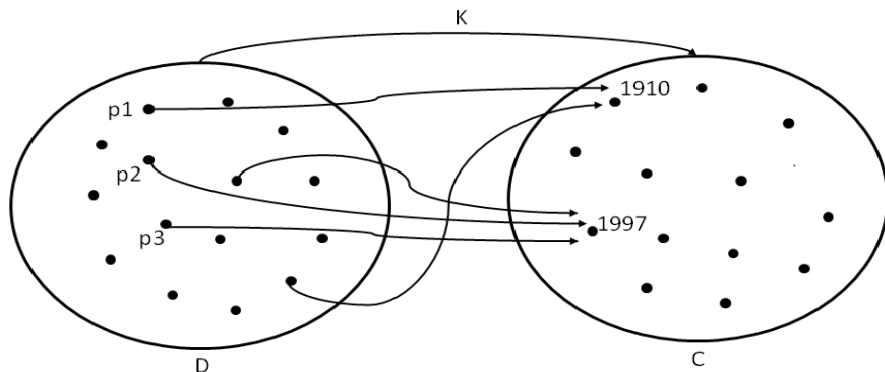
### Caratteristiche di una corrispondenza

#### Esempio

Generalizziamo uno degli esercizi precedenti sulle date di nascita, prendiamo come dominio  $D = \{\text{persone italiane viventi}\}$  e come codominio  $C = \{\text{gli anni dal 1900 al 2009}\}$ .

Evidentemente  $I.D. = D$ , ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma **più persone sono nate nello stesso anno**; inoltre  $IM$  potrebbe coincidere con  $C$ , vista la presenza sul territorio nazionale di ultracentenari, comunque scriveremo  $IM \subseteq C$ .

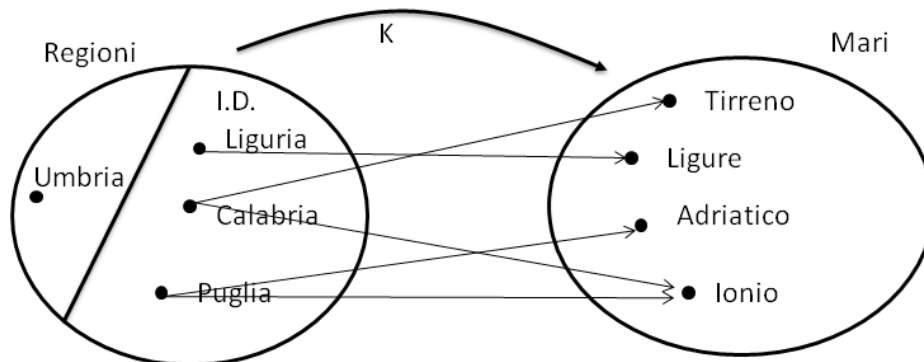
Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza molti a uno: più persone sono nate nello stesso anno.

#### Esempio

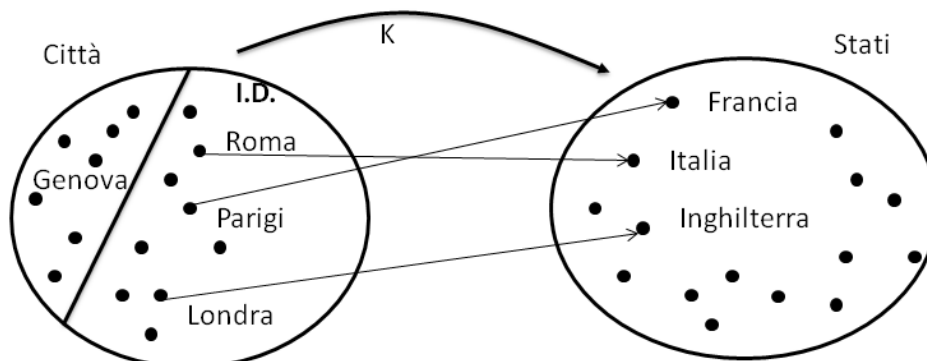
Analizziamo la corrispondenza dell'esempio precedente  $k: R \rightarrow M$  "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia e l'insieme dei mari;  $I.D. \subset D$  poiché alcune regioni non sono bagnate da alcun mare; **molte regioni sono bagnate dallo stesso mare**, ma succede che **alcune regioni sono bagnate da due mari**.  $IM = C$ : un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza di tipo "molti a molti".

#### Esempio

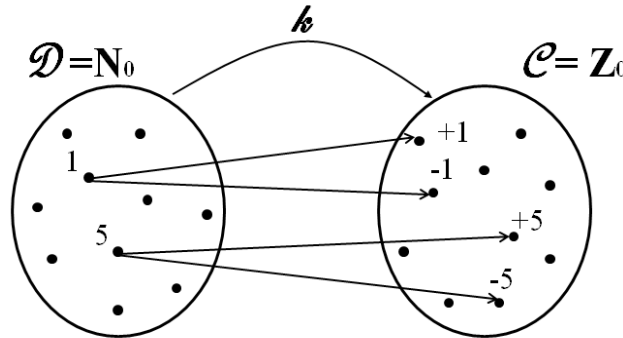
Generalizziamo la corrispondenza  $K$ : "essere la capitale di" tra il dominio  $C = \{\text{città d'Europa}\}$  e il codominio  $S = \{\text{stati d'Europa}\}$ . È evidente che  $I.D. \subset C$  non tutte le città sono capitali, mentre  $IM = C$  in quanto ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza "uno a uno".

Esempio

Consideriamo tra l'insieme  $N_0$  dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme  $Z_0$  degli interi relativi diversi da zero la corrispondenza  $K$ : "essere il valore assoluto di". Per la definizione di valore assoluto di un intero, possiamo senz'altro dire:  $N_0 = D = I.D.$  ;  $Z_0 = C = IM$ . Ma succede che **numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto**, quindi ogni elemento di  $N_0$  ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è:



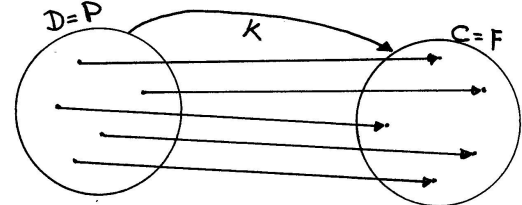
Esempio di corrispondenza "uno a molti".

**DEFINIZIONE.** Le **corrispondenze** di tipo molti a uno e uno a uno sono dette **univoche**; in esse ogni elemento dell'Insieme di Definizione ha una sola IMMagine nel codominio.

Esempio

Consideriamo la corrispondenza  $K$  che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. **Dominio e I.D. coincidono** e sono l'insieme  $P = \{ \text{persone} \}$ , **Codominio e IM coincidono** e sono l'insieme  $F = \{ \text{codici fiscali} \}$ . Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo a fianco riportato.

È di questo stesso tipo il grafico sagittale della corrispondenza che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni maggiorenne, cittadino italiano, il suo certificato elettorale .....



In tutti questi casi la corrispondenza è di tipo **uno → uno**, il dominio coincide con l'insieme di definizione e l'insieme immagine coincide con il codominio.

**DEFINIZIONE.** Una corrispondenza di tipo **uno → uno** in cui  $D = I.D.$  e  $C = IM$  è detta **corrispondenza biunivoca**.

**209** È univoca la corrispondenza  $K$  definita tra l'insieme  $P = \{ \text{parola del proverbio "rosso di sera, bel tempo si spera"} \}$  e l'insieme  $A = \{ \text{lettere dell'alfabeto italiano} \}$  che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme IMMagine e Codominio:  $IM \dots C$ . Fai il grafico sagittale della corrispondenza.

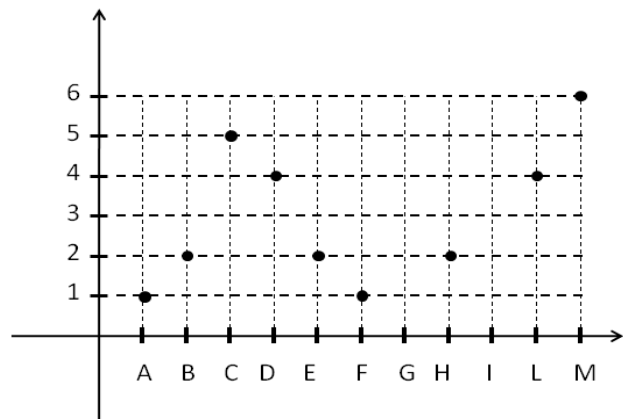
**210**  $K$  è la corrispondenza tra l'insieme  $N$  dei naturali e l'insieme degli interi relativi  $Z$  espressa dal predicato "essere il quadrato di". Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Perché  $IM = C$ ? La corrispondenza è univoca?

**211** Una corrispondenza  $K$  è assegnata con il suo grafico cartesiano:

Completa e rispondi alle domande:

- $D = \{ \dots \}$
- $C = \{ \dots \}$
- $I.D. = \{ \dots \}$
- $IM = \{ \dots \}$

1. La corrispondenza è univoca?
2. 2 è l'immagine di quali elementi dell'Insieme di Definizione?
3. Quale elemento del codominio è l'immagine di M?



**212** I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze,  $K_1, K_2, K_3$ . Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:

<b>D</b> = .....	<b>D</b> = .....	<b>D</b> = .....
<b>C</b> = .....	<b>C</b> = .....	<b>C</b> = .....
<b>I.D.</b> = .....	<b>I.D.</b> = .....	<b>I.D.</b> = .....
<b>IM</b> = .....	<b>IM</b> = .....	<b>IM</b> = .....
<b>Tipo</b> = .....	<b>Tipo</b> = .....	<b>Tipo</b> = .....

**213** Il Dominio della corrispondenza  $K$  è l'insieme  $Z \times Z$  e  $Z$  ne è il Codominio; l'immagine della coppia  $(a,b)$  è l'intero  $p = a \cdot b$ .

- Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme Immagine.
- Perché questa corrispondenza non è biunivoca?
- Tutte le coppie aventi almeno un elemento uguale a zero hanno come immagine .....
- 1 è l'immagine di .....
- Te gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è .....
- Un numero negativo è immagine di .....

Fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

**214** Il Dominio della corrispondenza  $K$  è l'insieme  $Z \times Z$  e  $Q$  ne è il Codominio; l'immagine della coppia  $(a,b)$  è il numero razionale  $q = \frac{a}{b}$ .

1) Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme IMmagine.

2) Completa:

- lo zero è immagine delle coppie .....
- se gli elementi della coppia sono numeri opposti l'immagine è .....
- se gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è .....
- un numero negativo è immagine di .....

fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

**215** In un gruppo di 10 persone, due si erano laureate in medicina e tre in legge nell'anno 1961, mentre quattro anni dopo, una si era laureata in fisica, un'altra in scienze e due in legge.

Considerate i seguenti insiemi:

$P = \{x / x \text{ è una persona del gruppo}\}$ ;  $A = \{1960, 1961, 1964, 1965\}$ ;  $F = \{x / x \text{ è una facoltà universitaria}\}$

Fatene la rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn e studiate le corrispondenze  $K_1, K_2$ , espresse dai predicati:

$K_1$ : "essersi laureato nell'anno"

$K_2$ : "essere laureato in"

mettendo in evidenza per ciascuna Dominio, Codominio, Insieme di Definizione, IMmagine, tipo.

Complete:

- Nel gruppo ci sono ... persone laureate in legge, di cui ... nell'anno 1961 e le altre ... nell'anno...
- Nel 1961 si sono laureate ... di cui ... in medicina
- Negli anni ... non si è laureata nessuna persona del gruppo considerato
- Tra le 10 persona ... non si è laureata

N.B. ciascuno possiede una sola laurea

Maria si è laureata in fisica nello stesso anno in cui si è laureato suo marito Luca; Andrea è fratello di Luca, non è medico, ha frequentato una facoltà diversa da quella del fratello e si è laureato in un anno diverso. Supponendo che Maria, Luca, Andrea siano tra le 10 persone di cui sopra, completate:

- Maria si è laureata nell'anno ..... Andrea si è laureato nell'anno ..... in ..... Luca si è laureato nell'anno ..... in ..... N.B. ciascuno possiede una sola laurea

## ► 12. Funzioni o applicazioni

Diamo la seguente definizione

**DEFINIZIONE.** Una corrispondenza univoca tra due insiemi A e B non vuoti si chiama **funzione o applicazione** di A in B se e solo se Dominio = Insieme di Definizione = A .

Esempio \_\_\_\_\_

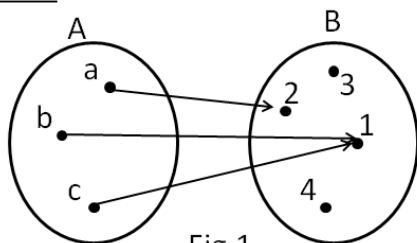


Fig.1

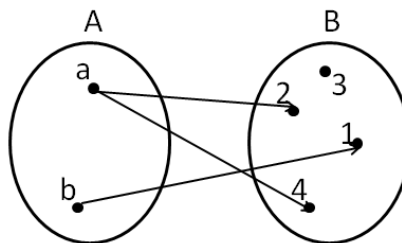


Fig.2

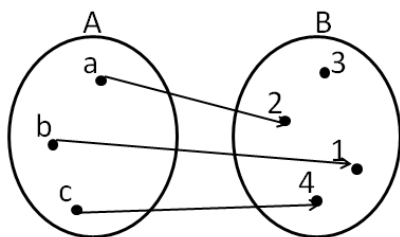


Fig.3

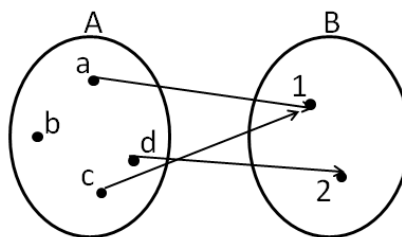


Fig.4

Analizziamo le corrispondenze sopra rappresentate con grafico sagittale:

La corrispondenza di fig.1 rappresenta una funzione.

La corrispondenza di fig. 2 non rappresenta una funzione perché l'elemento a di A è in corrispondenza con due elementi di B, il 2 e il 4, quindi non è una corrispondenza univoca.

La corrispondenza della fig.3 rappresenta una funzione.

La corrispondenza della fig.4 non è una funzione perché il **Dominio** non coincide con l'insieme A.

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine “funzione” quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera  $f$  e si intende la legge che **associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B**.

Per indicare la legge che fa passare dall'insieme A all'insieme B usiamo la scrittura

$$f: A \rightarrow B \text{ oppure } A \xrightarrow{f} B$$

### DEFINIZIONI

L'elemento  $y$  di B, corrispondente di un elemento  $x$  del **Dominio**, viene detto **immagine di x nella funzione f** e si scrive  $y = f(x)$  che si legge “y uguale effe di x”.

Il sottoinsieme proprio o improprio di B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del **Dominio** si chiama **Codominio o insieme IMMagine** e si scrive  $C = IM = f(D)$ . Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di B è immagine di un elemento del dominio per cui  $C \subseteq B$ .

**216** Per le funzioni rappresentate nell'esempio precedente, completa:

fig.1 :  $D = ID = \{ \dots \}$  ;  $C = IM = \{ \dots \}$  ;  $f(a) = \dots$  ;

fig.3 :  $D = ID = \{ \dots \}$  ;  $C = IM = \{ \dots \}$  ;  $f(\dots) = 4$  ;

**217** È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?

1. Completa:  $D = ID = \dots$
2. È vero che  $IM = \{ \text{città d'Italia} \}$ ?  $\dots$
3. Completa  $f(\text{Liguria}) = \dots$ ;  $f(\dots) = \text{Cagliari}$ ?

**218** Assegnati gli insiemi  $A = \{ \text{mare, ruspa, fegato, generale} \}$  e  $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$  la corrispondenza che associa ad ogni elemento di A il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?

1. Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme IMMagine
2. Quale relazione sussiste tra B e IM?

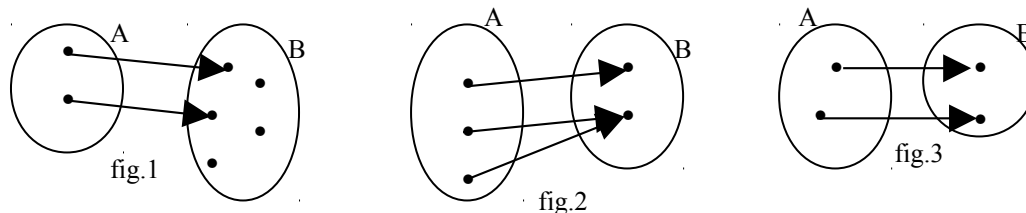
**219** Quali tra le seguenti corrispondenze sono funzioni?

	dominio	codominio	corrispondenza
a)	libri	autori	a ogni libro associa l'autore
b)	canzoni	cantanti	a ogni canzone associa il cantante
c)	portoni di una via	numeri	a ogni portone associa il numero civico
d)	computer	sistemi operativi	a ogni computer associa il S.O. installato

### Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

#### Esempio

Nella figure sottostanti sono rappresentate funzioni:



In fig.1 si ha  $IM \subset B$  elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B

In fig.2 si ha  $IM = B$  ma elementi distinti di A hanno la stessa immagine in B

In fig.3 si ha  $IM = B$  ed elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B

I tre esempi ci illustrano tre tipi diversi di funzioni:

#### DEFINIZIONI

Si dice **iniettiva** una funzione in cui elementi distinti del Dominio hanno immagini distinte in B: **per qualunque  $x_1, x_2$  di A con  $x_1 \neq x_2$  si ha  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .**

Si dice **suriettiva** una funzione in cui  $IM = B$ .

Si dice **biunivoca o biiettiva** una funzione che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva**.

Pertanto in fig.1 è rappresentata una funzione iniettiva, in fig.2 una funzione suriettiva e in fig.3 una funzione biunivoca.

**220** Si è ammessi alla facoltà U se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il suo punteggio è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

**221** Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

### Diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze

Legenda:

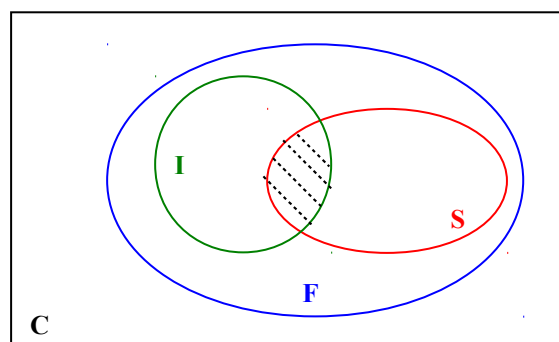
**C** insieme delle corrispondenze

**F** insieme delle funzioni

**S** insieme delle funzioni suriettive

**I** insieme delle funzioni iniettive

$I \cap S$  insieme delle funzioni biunivoche



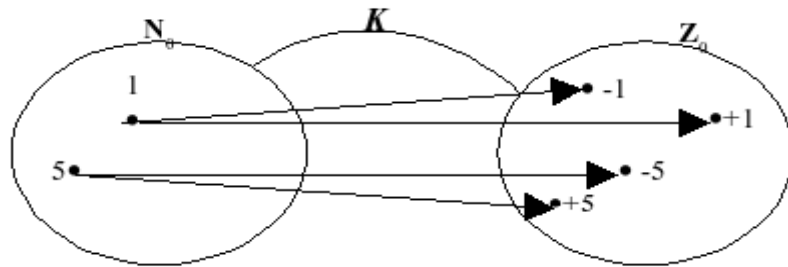
### Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione  $f$  può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento  $x$  del dominio si chiama **variabile indipendente**; il corrispondente elemento  $y = f(x)$  si chiama **variabile dipendente**.



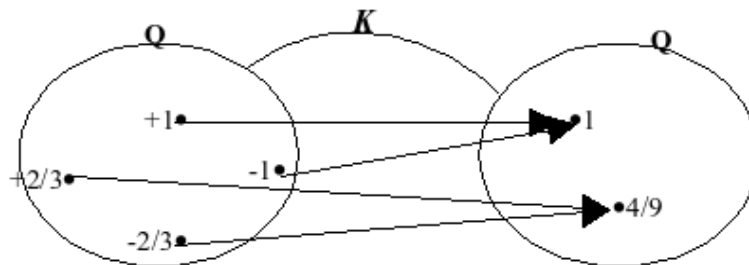
Esempio

Consideriamo la corrispondenza **K**: “essere il valore assoluto” tra l’insieme  $N_0$  dei naturali diversi da zero e l’insieme  $Z_0$  degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza **non è una funzione** in quanto **non è una corrispondenza univoca**: un elemento di  $N_0$  ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dal grafico sottostante:



Esempio

Consideriamo la corrispondenza **K** che **associa ad ogni numero razionale il suo quadrato**. Essa è una funzione di **Dominio Q**: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame **non è iniettiva**, come rappresentato dal grafico sottostante:



L’immagine  $y$  di ogni  $x$  appartenente a  $Q$  è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula **f**:  $y = x^2$ .

Per quanto riguarda l’insieme **IM** Immagine o Codominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di  $Q$ : il numero razionale  $+3/4$  non è quadrato di nessun razionale e neppure  $-25$ , razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi  $IM \subset Q^+ \cup \{0\}$ , pertanto la funzione non è suriettiva.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza che **associa ad ogni intero il suo valore assoluto**. Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l’insieme  $Z$ , pertanto è una funzione: **f**:  $Z \rightarrow N$  rappresentata in forma analitica con  $y = |x|$  con  $x \in Z$  e  $y = f(x) \in N$ .

$x \in Z$	0	+1	-1	-2	+2	+3	-3	.....
$y \in N$	0	1	1	2	2	3	3	.....

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del **Dominio** con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

**222** Con riferimento all’esempio precedente, è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate:  $f(\dots) = 45$

L’osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva?

Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

Esempio

È assegnata la funzione **f**:  $x \in N \rightarrow (x-2) \in Z$ . In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale il numero intero ottenuto da quello sottraendo 2. L’espressione analitica della funzione è **f**:  $y = x - 2$  e la legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella

$x \in N$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2) \in Z$	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	.....

Ogni elemento dell’insieme  $N$  trova il corrispondente in  $Z$ ; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è **iniettiva**; il Codominio o insieme **IM** Immagine è un sottoinsieme proprio di  $Z$  e precisamente  $C = IM = \{y \in Z / y \geq -2\}$ , pertanto la funzione non è suriettiva.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza:  $f_1: x \in \mathbb{N} \rightarrow (x-2) \in \mathbb{N}$  costruendo la relativa tabella:

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2) \in \mathbb{N}$			0	1	2	3	4	.....

Vediamo che né 0 né 1 hanno l'immagine nella corrispondenza assegnata.

Fissiamo allora come Dominio un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  e precisamente  $\mathbf{D} = \mathbf{ID} = \mathbb{N} - \{0,1\}$ ; e procediamo nell'analisi della funzione  $f_1: y = x - 2$ ;

**223** Completa l'analisi della funzione dell'esempio precedente:

1. elementi diversi del Dominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è **iniettiva**; si ha anche  $\mathbf{C} = \mathbf{IM} = \mathbb{N}$  e pertanto la funzione è **suriettiva**, quindi .....
2. Preso  $y = 8$  sapresti trovare l'elemento del Dominio di cui è immagine? .....

Esempio

Consideriamo la corrispondenza che **associa ad ogni numero razionale il suo inverso** (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale  $x$  significa scrivere il numero razionale  $\frac{1}{x}$ , ma questa operazione ha significato solo se  $x$  è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su  $\mathbb{Q}$  e fissiamo  $\mathbf{D} = \mathbf{ID} = \mathbb{Q}_0$ . La corrispondenza è una funzione tra  $\mathbb{Q}_0$  e  $\mathbb{Q}$ . In simboli matematici  $f: y = \frac{1}{x}$

**224** Stabilite se la funzione  $f: y = \frac{1}{x}$  è iniettiva. Nell'insieme **IM** imagine c'è lo zero?

Completate  $\mathbf{C} = \mathbf{IM} = \dots\dots\dots$

Completate la tabella

$x \in \mathbb{Q}_0$	-2	-7/8	+1				-1	
$y \in \mathbb{Q}_0$				+1/3	-12/5	-7/8		-1

**225** Consideriamo la funzione  $f$  che **associa ad ogni numero razionale il suo triplo**.

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  la sua espressione in forma analitica è  $f: y = \dots\dots\dots$

**Dominio** =  $\mathbf{ID} = \mathbb{Q}$ ; possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

**Codomio** =  $\mathbf{IM} = \mathbb{Q}$ ; infatti il triplo di un numero razionale è ancora un numero razionale.

Rispondete:

1. Qual è l'immagine di 0? .....
2. Quale elemento del dominio ha per immagine 5? .....
3. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? .....
4. È vero che -1 è immagine di -3? .....
5. La funzione è iniettiva?
6. È biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

**226** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme immagine e stabilire se la funzione è iniettiva o suriettiva.

- a)  $y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $x \rightarrow 2x$
- b)  $y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $x \rightarrow x^2$   
 $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- c)  $x \rightarrow \frac{1}{x}$
- c)  $y: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $x \rightarrow 2x$   
 $y: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- d)  $x \rightarrow \frac{1}{x}$

### Funzioni inverse

È assegnata la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  descritta mediante le istruzioni

Prendi  $x \in \mathbb{R} \rightarrow$  moltiplica per 2  $\rightarrow$  aggiungi 1  $\rightarrow$  scrivi  $y$  (1)

La forma algebrica è  $y = 2 \cdot x + 1$ ; essa è definita per qualunque numero reale e l'insieme immagine coincide con il codominio.

Scelto arbitrariamente un valore da assegnare alla variabile indipendente  $x = -2$  otteniamo la sua immagine determinando il risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni (1)  $y = -3$ .

Preso ora  $y = 4$ , elemento dell'insieme Immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Il problema si formalizza in questo modo:

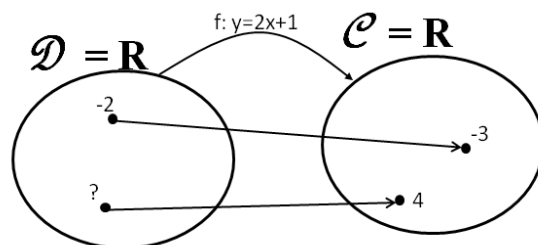
“per quale valore di  $x$  aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4?”

Le due questioni sono rappresentate nel diagramma di Eulero-Venn e percorrendo la (1) con le operazioni inverse otteniamo il valore di  $x$  sottraendo 1 al valore dato per  $y$  e dividendo il risultato per 2. Le istruzioni da eseguire sono:

da  $y$  togli 1  $\rightarrow$  dividi il risultato per due  $\rightarrow$  scrivi  $x$

in formula  $x = (y - 1) : 2$ .

La funzione così ottenuta si chiama **funzione inversa** di  $f(x)$  e si scrive  $f^{-1}$ .



Poiché la funzione assegnata è iniettiva, ci rendiamo subito conto che per ogni  $y$  dell'insieme immagine possiamo determinare la controimmagine (cioè l'unico valore di  $x$  tale che  $f(x) = y$ ).

**DEFINIZIONE.** Per **funzione inversa di una funzione iniettiva**  $y = f(x)$  si intende quella funzione che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento dell'insieme immagine di  $f(x)$ . Il simbolo della funzione inversa è  $f^{-1}$ .

Osserviamo che  $D(f^{-1}) = \text{IM}(f)$  e  $\text{IM}(f^{-1}) = D(f)$

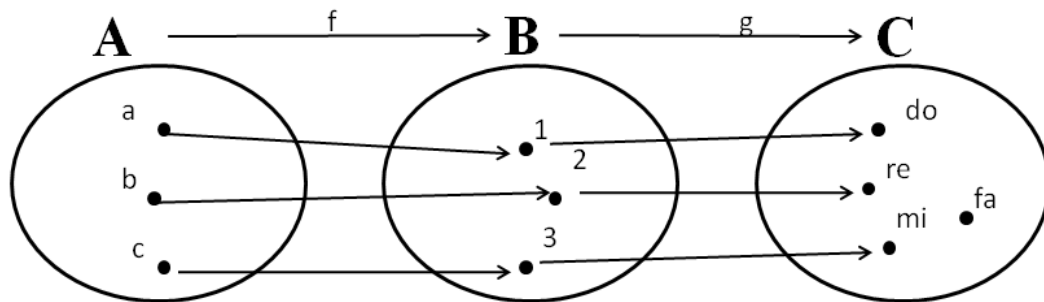
**227** Per ciascuna delle funzioni elencate, riempite le colonne della tabella

$y = f(x)$	$f(x)$ è iniettiva?	$x = f^{-1}(y)$
$y = 2x$		
$y = x + 2$		
$y = 2x - 2$		
$y = x^2$		
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$		
$y = \sqrt{2} \cdot x$		

**228** Assegnata la funzione lineare  $f: y = m \cdot x + q$ , essendo una funzione iniettiva la sua inversa è: ...

### Composizione di funzioni

Date due funzioni  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  è possibile definire la funzione composta  $g \circ f: A \rightarrow C$  che a un elemento  $a$  di  $A$  associa prima l'elemento  $b=f(a)$  e poi l'elemento  $c=g(b)$ , in un'unica formula si può scrivere  $g(f(a))=c$ .



#### Esempio

- Data la funzione  $f(x)=2x$  e la funzione  $g(x)=x+1$ , determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione  $f$  che raddoppia il valore di  $x$ . Al valore ottenuto, che è  $2x$ , si applica la  $g$  che fa aumentare di 1. Pertanto la funzione composta raddoppia  $x$  e poi aggiunge 1. L'espressione è  $g(f(x))=2x+1$ . Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti la funzione  $f(g(x))$  si ottiene facendo agire prima la  $g(x)$  che aumenta di 1 il valore della variabile e poi la  $f(x)$  che raddoppia il valore della variabile; allora  $f(g(x))=2(x+1)$

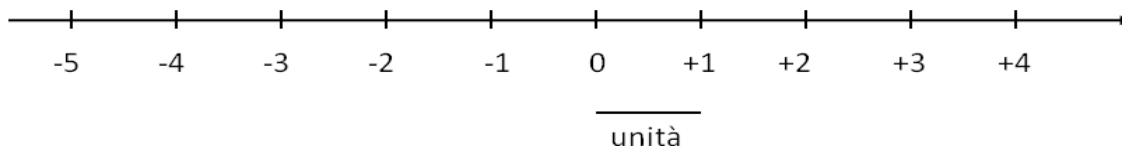
**229** Date le funzioni  $f(x)=2x+1$  e  $g(x)=3x+2$  che hanno per dominio rispettivamente

$A=\{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $B=\{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 3\}$ . Determina  $C$  codominio di  $f$  e  $D$  codominio di  $g$ . Determina  $C \cup D$  e  $C \cap D$ . Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .

### ► 13. La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio  $N$  e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma **non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale: la corrispondenza non è biunivoca.**

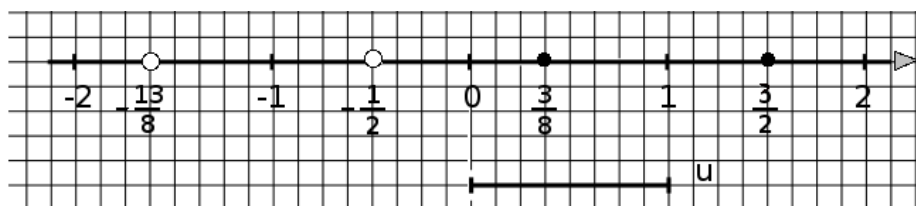
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme  $Z$  come Dominio e i punti di una retta orientata come Codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma **non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero: l'insieme IMmagine non coincide con il Codominio e la corrispondenza non è biunivoca.**

Gli insiemi  $N$  e  $Z$  sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che  **$N$  e  $Z$  sono due insiemi discreti.**

Consideriamo ora l'insieme  $Q$  dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante



Esempi di rappresentazione di numeri razionali sulla retta orientata.

L'insieme  $Q$  rispetto agli insiemi  $N$  e  $Z$  presenta un'altra caratteristica: è **denso**, cioè tra due numeri razionali ce ne sono infiniti altri numeri razionali.

Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra  $3/8$  e  $3/2$  si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero

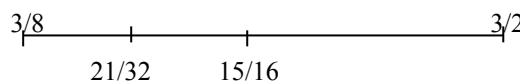
$q = \frac{\frac{3}{8} + \frac{3}{2}}{2}$  ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene

$q = \frac{15}{16}$  che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di  $\frac{3}{2}$ , ma maggiore di  $\frac{3}{8}$ , come puoi verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16.

Con lo stesso procedimento possiamo determinare  $q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{8} + \frac{15}{16} \right) = \frac{21}{32}$  che risulta maggiore di  $\frac{3}{8}$  e minore

di  $q$ . Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri

razionali compresi tra  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{3}{2}$ .



Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $Q$  e i punti della retta.

Invece, no! Nel capitolo "Insiemi Numerici-introduzione ai numeri reali" abbiamo visto che benché l'insieme  $Q$  sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.

L'insieme che si ottiene dall'**unione dell'insieme  $Q$  con l'insieme  $J$  degli irrazionali** è l'**insieme  $R$  dei numeri reali**, cui Cantor attribuì cardinalità  $\aleph_1$ . La retta geometrica orientata è in corrispondenza

biunivoca con  $\mathbf{R}$ , il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

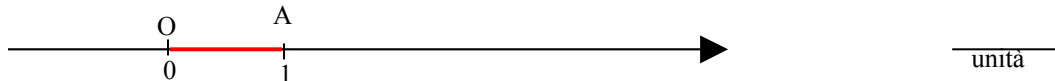
**DEFINIZIONE.** Si chiama **ascissa di un punto sulla retta reale** il numero reale  $\alpha$  che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

Esempio

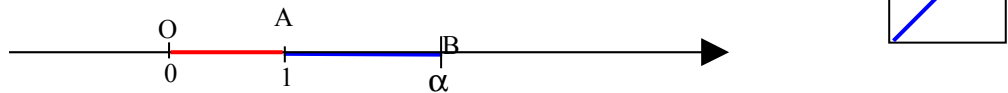
Determinare l'immagine del numero reale  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  sulla retta reale.

Soluzione:

Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.



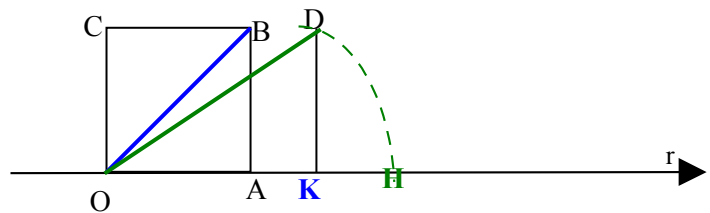
Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale  $\sqrt{2}$ , che è la diagonale del quadrato di lato l'unità. Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura:



Il punto B è l'immagine del numero  $\alpha$ , e scriviamo  $B(\alpha)$

**Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo  $\sqrt{n}$  con  $n \in \mathbb{N}_0$ .**

Nella figura è segnato il punto **K** immagine del numero  $\sqrt{2}$ ; sulla perpendicolare alla retta  $r$  nel punto **K** prendiamo il segmento  $KD = OA$  e congiungiamo **D** con **O**. Per il teorema di Pitagora sul triangolo **OKD** si ha  $\overline{OD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{OA}^2$  e

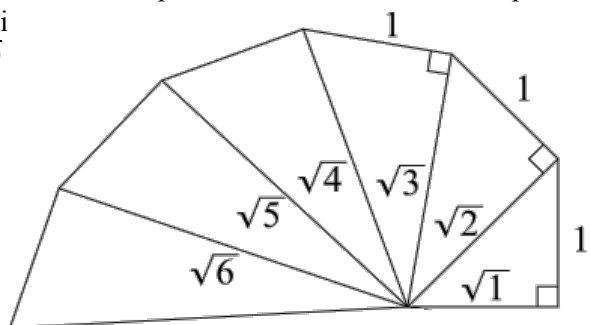


passando alle misure  $\overline{OD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$  pertanto  $\overline{OD} = \sqrt{3}$ ; puntando il compasso in **O** con raggio **OD** tracciamo l'arco che incontra la retta  $r$  in **H** immagine del numero irrazionale  $\sqrt{3}$

Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo  $\sqrt{n}$ .

Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro", permette di ottenere i segmenti di misura  $\sqrt{n}$  con  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura  $\sqrt{2}$ . Sulla perpendicolare in **C** ad **AC** si prende il segmento **CD** di misura 1: applicando il teorema di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo  $\overline{AD} = \sqrt{3}$ . Ripetiamo la costruzione dal vertice **D** e otteniamo il triangolo rettangolo **ADE** la cui ipotenusa è  $\overline{AE} = \sqrt{4}$  e poi  $\overline{AF} = \sqrt{5}$  e così via.



**230** Determinate sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali:

$$\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad \beta = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \delta = -(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad ; \quad \lambda = \sqrt{3} - 3$$

**231** Verificate che il numero  $\chi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  non è uguale al numero  $\omega = \sqrt{5}$ , usando la rappresentazione sulla retta orientata.

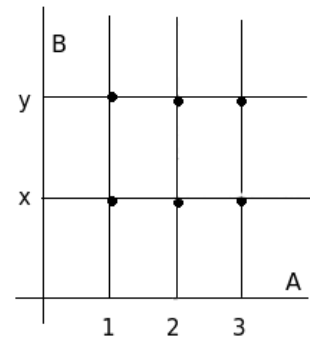
**232** Stabilite il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  non vi è nessun numero reale".

## ► 14. Il metodo delle coordinate cartesiane

Ricordiamo che abbiamo definito **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive:  $A \times B = \{(a; b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$ .

### Esempio

Il prodotto cartesiano dei due insiemi  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{x, y\}$  è  $A \times B = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; x), (3; y)\}$  e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura accanto.



Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale.

### Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

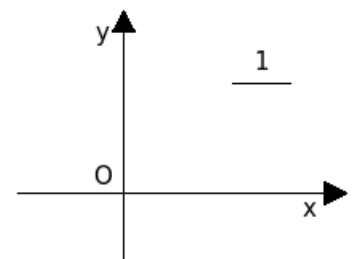
Preso l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ : esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(0; 0), (0; +), (0; -), (+; 0), (+; +), (+; -), (-; 0), (-; +), (-; -)\}$$

*È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?*

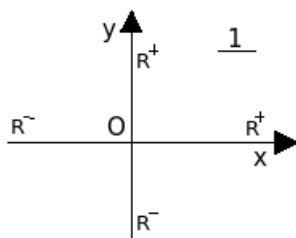
Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura.

Indichiamo con x l'asse orizzontale che chiamiamo **asse delle ascisse** e con y l'asse verticale che chiamiamo **asse delle ordinate**.



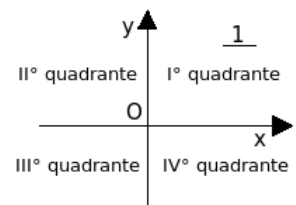
**DEFINIZIONE.** Si chiama **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura.



Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale:

O è immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi.



Per rappresentare gli elementi di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cioè le coppie ordinate di numeri reali  $(\alpha; \beta)$  procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale  $\alpha$ ;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale  $\beta$ ;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

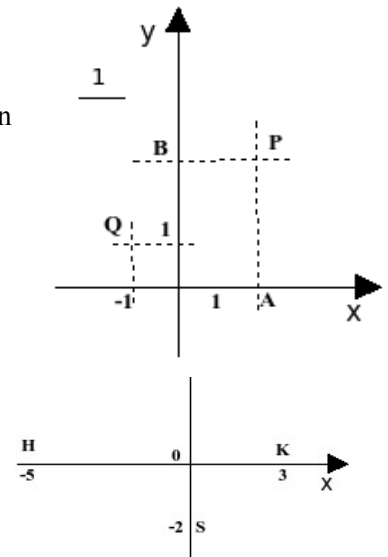
Il punto P, intersezione delle parallele tracciate, è l'immagine della coppia ordinata  $(\alpha; \beta)$ .

**Esempio**

Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate (2;3) e (-1;1)

Nella figura accanto è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del piano immagine della coppia (2;3) e Q è il punto immagine della coppia (-1;1).

Rappresenta le coppie (4;-1) e (-4;1). Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?



**Esempio**

Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: (0;5), (0;-2), (-5;0), (3;0)  
 Osserviamo che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia (0;5) sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia (0;-2) al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie (-5;0) e (3;0) sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

Il punto **O** è immagine della coppia (0;0) ed è chiamato **Origine**.

**Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.**

**233** Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse:

- |                     |                               |                      |                    |
|---------------------|-------------------------------|----------------------|--------------------|
| $(0; -1)$           | $(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4})$ | $(0; \frac{1}{3})$   | $(\frac{5}{3}; 1)$ |
| $(1; -\frac{5}{3})$ | $(-8; 9)$                     | $(-2; -\frac{1}{4})$ | $(-1; 0)$          |

Completa l'osservazione conclusiva:

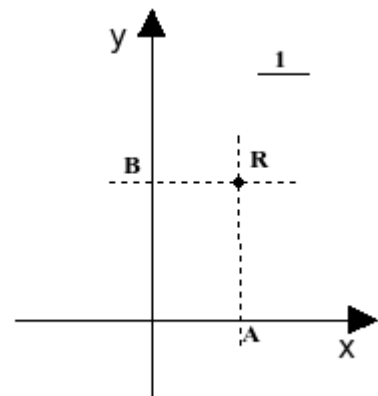
- Tutte le coppie del tipo (+;+) individuano punti del .....
- Tutte le coppie del tipo (.,..) individuano punti del IV° quadrante"
- Tutte le coppie del tipo (-;+) individuano punti del .....
- Tutte le coppie del tipo (-;-) individuano punti del .....
- Tutte le coppie del tipo (...;0) individuano punti del .....
- Tutte le coppie del tipo (...;...) individuano punti dell'asse y"

Prendiamo ora un punto R del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale  $\alpha$ . Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale  $\beta$ . Al punto R associamo la coppia di numeri reali  $(\alpha;\beta)$ .

Diremo che **R è il punto di coordinate  $(\alpha;\beta)$** ,  $\alpha$  si chiama **ascissa** del punto R,  $\beta$  **ordinata** del punto R.

**Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.**

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto (2;3), Q il punto (-1;1)" invece di "P è il punto immagine della coppia (2;3)" o "P è il punto di coordinate (2;3)".



**Un po' di storia**

Nel II° secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine.

La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri.

Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre.

I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti algebrici.



La geometria analitica tratta questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

### Distanza di due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto  $P(\alpha; \beta)$ , il numero reale  $|\alpha|$  rappresenta la misura della distanza del punto dall'asse  $y$  e il numero reale  $|\beta|$  rappresenta la misura della distanza di  $P$  dall'asse  $x$ .

#### Esempio

Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti  $P(+1;-3)$ ,  $Q(+5;+5)$ ,  $R(-2;+3)$ ,  $S(-5;-1)$ .

Dati:  $P(+1;-3)$

Obiettivo:

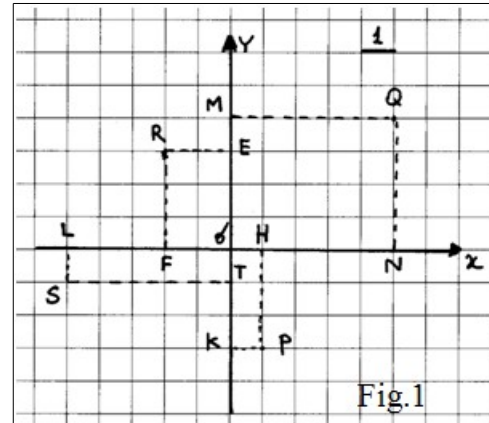
$PH \perp$  asse  $X$ ; il segmento  $PH$  è la distanza di  $P$  dall'asse  $x$ .

$PK \perp$  asse  $y$ ; il segmento  $PK$  è la distanza di  $P$  dall'asse  $y$ .

Per quanto detto sopra si ha

$$\overline{PH} = |-3| = -(-3) = 3 \quad \overline{PK} = |+1| = 1$$

Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.



Vogliamo ora determinare la misura  $\overline{AB}$  di un segmento  $AB$ , inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxy$ , conoscendo le coordinate degli estremi  $A$  e  $B$  del segmento stesso.

**I° caso:** i due punti hanno la stessa ascissa: il segmento  $AB$  è parallelo all'asse  $y$  e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse  $x$ .

Dati:  $A(2;7)$ ,  $B(2;3)$

Obiettivo:  $?\overline{AB}$

Procedura risolutiva:  $\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = y_A - y_B = 7 - 3 = 4$

Dati:  $A(5;5)$ ,  $B(5;-3)$

Obiettivo:  $?\overline{AB}$

Procedura risolutiva:

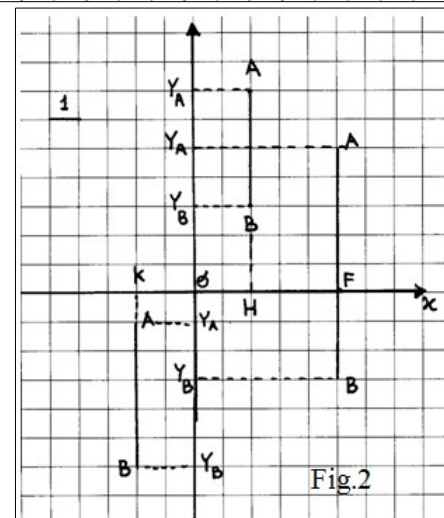
$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = y_A + (-y_B) = y_A - y_B = 5 - (-3) = 8$$

Dati:  $A(-2;-1)$ ,  $B(-2;-6)$

Obiettivo:  $?\overline{AB}$

Procedura risolutiva:

$$\overline{AB} = \overline{BK} - \overline{AK} = -(y_B) - (-y_A) = y_A - y_B = -1 + 6 = 5$$



Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere:

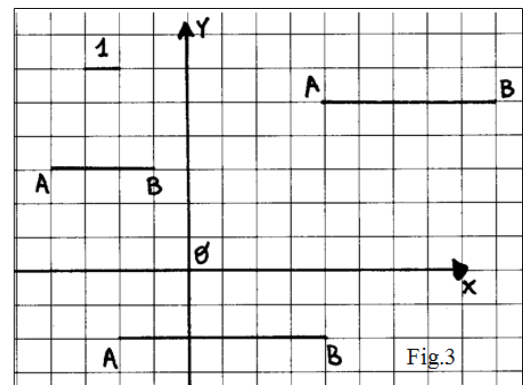
**La misura del segmento  $AB$  parallelo all'asse delle ordinate è  $\overline{AB} = |x_A - x_B|$  indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.**

**234** Sono assegnati i punti  $A(3;-1)$ ,  $B(3;5)$ ,  $M(-1;-1)$ ,  $N(-1;-7)$ . È vero che  $\overline{AB} = \overline{MN}$  ?

**II° caso:** i due punti hanno la stessa ordinata: il segmento  $AB$  è parallelo all'asse  $x$  e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse  $y$ . (Fig.3)

Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento  $AB$  nella figura accanto, verifica che in ogni caso  $\overline{AB} = |x_A - x_B|$

**La misura del segmento  $AB$  parallelo all'asse delle ascisse è  $\overline{AB} = |x_A - x_B|$  indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.**



**235** Sono assegnati i punti  $A(1;5)$ ,  $B(-4;5)$ ,  $C(-4;-2)$ ,

$D(5;-2)$ . Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinate l'area del quadrilatero  $ABCD$ .

**236** Determinate l'area del quadrilatero  $MNPQ$  sapendo che  $M(6;-4)$ ,  $N(8;3)$ ,  $P(6;5)$ ,  $Q(4;3)$ .

**III° caso:** è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati. (Fig.4)

Dati:  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  Obiettivo:  $? \overline{AB}$

Tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa.

Per il teorema di Pitagora si ottiene:

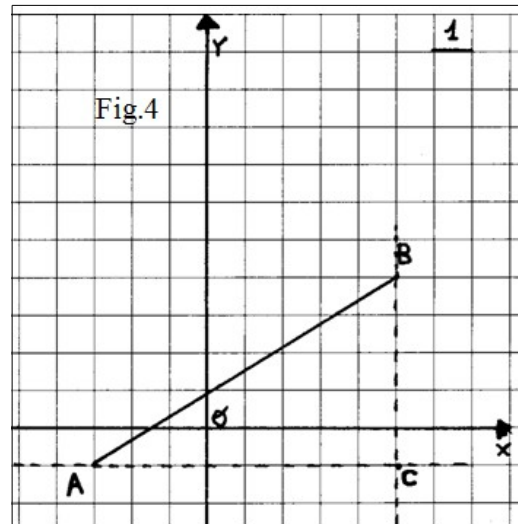
$$\overline{AB} = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

Poiché  $x_C = x_B$  e  $y_C = y_A$  sostituendo si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} .$$

**La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi è**

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} .$$

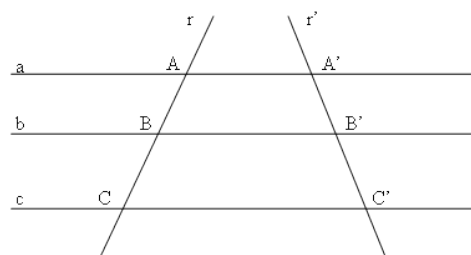
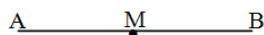


- 237** Determina  $\overline{AB}$  sapendo che  $A(7;-1)$  e  $B(-3;-6)$ .
- 238** Determina la distanza di  $P(-3; 2,5)$  dall'origine del riferimento.
- 239** Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici  $A(3;-2)$ ,  $B(4;1)$ ,  $C(7;-4)$ .
- 240** Determina il perimetro del quadrilatero di vertici  $A(1;5)$ ,  $B(-4;5)$ ,  $C(-4;-2)$ ,  $D(5;-2)$ .
- 241** Determina il perimetro del quadrilatero di vertici  $M(6;-4)$ ,  $N(8;3)$ ,  $P(6;5)$ ,  $Q(4;3)$ .
- 242** Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici  $A(1;-3)$ ,  $B(4;3)$ ,  $C(-3;1)$ ,  $D(-6;-5)$ .
- 243** Verifica che il triangolo di vertici  $E(4;3)$ ,  $F(-1;4)$ ,  $G(3;-2)$  è isoscele.
- 244** Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa  $\frac{5}{4}$ , il vertice C segue B e  $\overline{BC} = \frac{17}{2}$ . Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro sapendo che il terzo vertice è  $A(-1;5)$ .
- 245** I punti  $F(3;0)$ ,  $O(0;0)$ ,  $C(0;5)$  sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area la misura delle sue diagonali.
- 246** Il punto G appartiene all'asse x, ha ascissa maggiore all'ascissa di F ed è tale che  $\overline{EF} = \overline{FG}$ . Determina il perimetro del trapezio OGEC.

**Punto medio di un segmento**

Ricordiamo il teorema di Talete: “in un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale”. Cioè, se  $AB=BC$  allora  $A'B'=B'C'$ .  
 Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento: il punto medio di un segmento AB è il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti:

$$AM \equiv MB.$$



Vogliamo ora affrontare il seguente problema: conoscendo le coordinate degli estremi A e B di un segmento determiniamo le coordinate del suo punto medio.

Dati:

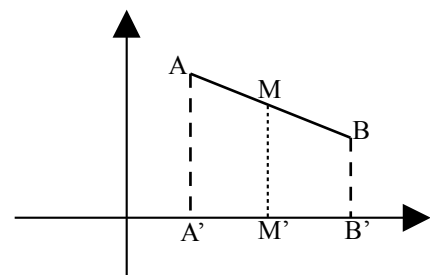
$$A(x_A; y_A)$$

$$B(x_B; y_B)$$

$$AM = MB$$

Obiettivo

$$? M(x_M; y_M)$$



Strategia: essendo  $AM \equiv MB$ , per il teorema di Talete  $A'M' \equiv M'B'$ ; si ha inoltre  $A'(x_A; 0)$ ,  $B'(x_B; 0)$ ,  $M'(x_M; 0)$  e quindi  $x_M - x_A = x_B - x_M$  da cui  $2x_M = x_A + x_B$  e dunque  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ .

Con ragionamento analogo tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x si ricava  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ .

**Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  sono**

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

### Esempio

Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi  $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ ,  $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4} + 2}{2} = \frac{5}{8}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{quindi} \quad M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$$

**247** Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

- |  |  |
|--|--|
| a) $A(-\sqrt{2}; 0)$ , $B(0; \sqrt{2})$  | e) $A\left(1 + \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ; $B\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ |
| b) $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ , $B\left(-\frac{1}{6}; 3\right)$ | f) $A\left(\frac{7}{5}; -\frac{7}{5}\right)$ , $B(1; -1)$  |
| c) $A(-1; 4)$ , $B(1; -4)$   | g) $A\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ , $B\left(\frac{1}{2}; -3\right)$                                 |
| d) $A\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ , $B(-2; -1)$                               |  |

**248** I vertici del triangolo ABC sono i punti  $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{1}{6}; 1\right)$ ,  $C\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ , determina le coordinate

dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

**249** I vertici del triangolo ABC sono i punti  $A(-3; 5)$ ,  $B(3; -5)$ ,  $C(3; 5)$ , i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

$$R. \left[ 2p_{ABC} = 2(8 + \sqrt{34}); \quad 2p_{MNP} = (8 + \sqrt{34}); \quad \frac{2p_{ABC}}{2p_{MNP}} = 2; \quad S_{ABC} = 30; \quad S_{MNP} = \frac{15}{2}; \quad \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = 4 \right]$$

**250** Verifica che il triangolo di vertici  $A(2; 3)$ ,  $B(6; -1)$ ,  $C(-4; -3)$  è rettangolo. È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

**251** Verifica che i segmenti AB e CD di estremi i  $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ ,  $B\left(-\frac{3}{4}; -2\right)$ ,  $C(3; 1)$ ,  $D\left(-\frac{7}{2}; -1\right)$  punti hanno lo stesso punto medio. È vero che  $AC = BD$  ?

## ► 15. Il grafico di una funzione

Ricordiamo le seguenti

### DEFINIZIONI

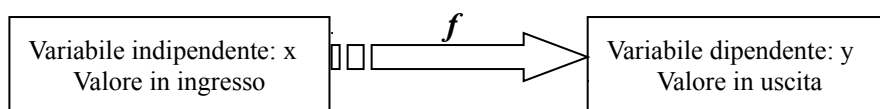
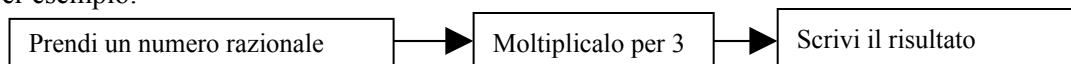
Una funzione  $f$  è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento  $x$  (**variabile indipendente**) del **Dominio** associa uno e un solo valore  $y$  della **variabile dipendente**.

L'elemento  $y$ , corrispondente di un elemento  $x$  del **Dominio**, viene detto **immagine di  $x$  nella funzione  $f$**  e si scrive  $y = f(x)$  che si legge “ $y$  uguale effe di  $x$ ”.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per Dominio e Codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- **Con linguaggio comune**, purché in modo preciso e inequivocabile:  
esempio: La funzione  $f$  “associa ad ogni numero razionale il suo triplo”
- **Attraverso un algoritmo**, cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita) :

Per esempio:



- **Mediante una tabella:**

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- **Con una formula** che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente:

Per esempio:  $y = 3x$

**252** Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle accanto a ciascuna.

1)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = \frac{1}{2}x$

x					
y					

2)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = -x$

x					
y					

3)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = 2 - 3x$

x					
y					

**253** Esprimi con linguaggio comune la funzione 1) dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

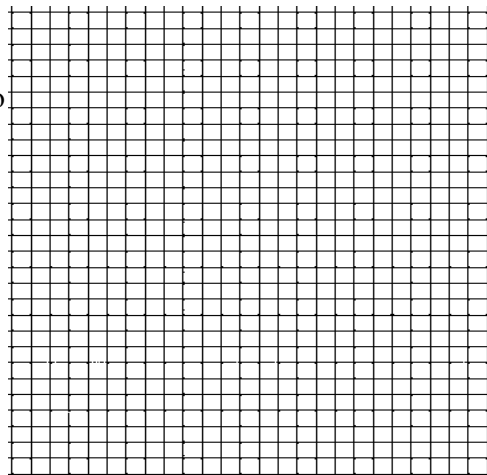
- Qual è l'immagine di 0?  $y = \dots\dots\dots$
- Quale elemento del **Dominio** ha per immagine 5?  $x = \dots\dots\dots$
- È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? Perché?
- È vero che  $-1$  è immagine di  $-2$ ? Perché?

**254** Traccia sul piano quadrettato a fianco un riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Completa la tabella per la funzione  $y = 2x$  avente come Dominio e Codominio l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali:

x	0		1/2	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia (x;y) determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.



**DEFINIZIONE.** Si chiama **grafico di una funzione** l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

**Osservazione**

I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

**Funzione di proporzionalità diretta**

x	0	-1	1/2	2	-3	-5/2
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

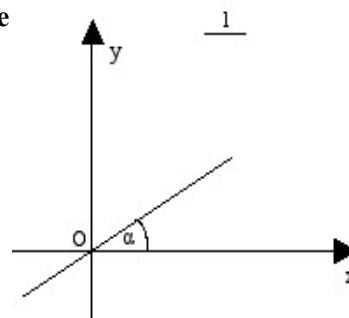
Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi?

Completa:  $\frac{y}{x} = \dots\dots$

**DEFINIZIONE.** Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità diretta**.  
 In simboli, y direttamente proporzionale a x  $\Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  e  $k \neq 0$  o anche  $y = k \cdot x$

**Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una retta passante per l'origine; la costante k si chiama coefficiente angolare della retta.**

Nella figura è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo  $\alpha$ ; la costante k ci dà informazioni su tale angolo.



**255** Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni la costante k, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

- a)  $f_1: y = \frac{1}{2}x$
- b)  $f_2: y = x$
- c)  $f_3: y = \frac{4}{3}x$
- d)  $f_4: y = \frac{3}{5}x$

- e)  $f_5: y = 5x$
- f)  $f_6: y = -\frac{1}{2}x$
- g)  $f_7: y = -x$
- h)  $f_8: y = -\frac{3}{4}x$

**256** Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni. Evidenzia con un tratto più calcolato la funzione  $f_2$  e compila la tabella:

funzione	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
k: coefficiente angolare					

Cancella i termini errati nella seguente analisi:

“Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l’asse orientato delle  $x$  un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la  $f_2$ ; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la  $f_2$ .”

**257** Ripeti l’esercizio precedente per le seconde cinque funzioni, evidenziando la funzione  $f_7$ ; costruisci l’analogia tabella e cancella i termini errati nella seguente analisi:

“Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l’asse orientato delle  $x$  un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di -1 stanno sopra/sotto la  $f_7$ ; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di -1 stanno sopra/sotto la  $f_7$ .”

**Conclusione**

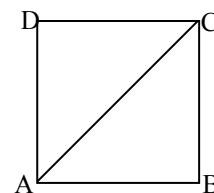
Se la costante di proporzionalità è positiva, l’angolo  $\alpha$  è acuto, se la costante è negativa allora l’angolo  $\alpha$  è ottuso.

**Problema**

Nel quadrato ABCD il cui lato misura  $x$ , determinare il perimetro e la diagonale.

Dati:  $\overline{AB} = x$  con  $x > 0$

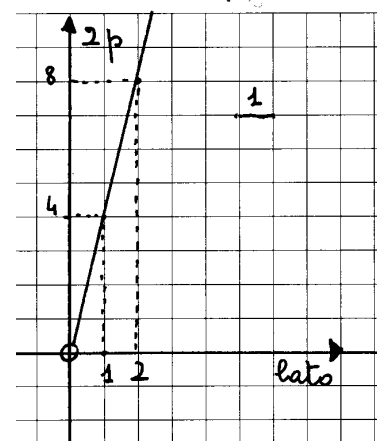
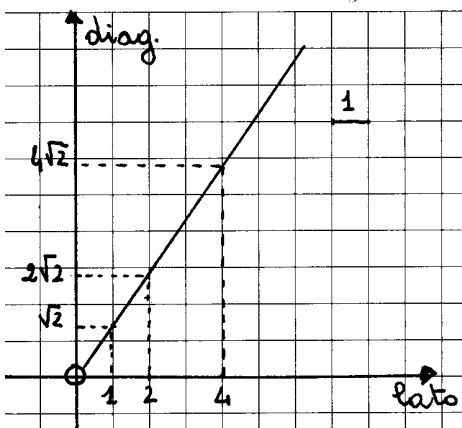
Obiettivo:  $? 2p$ ;  $? \overline{AC}$



**Soluzione**

$2p = 4 \cdot x$ , al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato.

Indicato con  $y$  il perimetro scriviamo  $y = 4x$ , funzione di proporzionalità diretta con  $D$ ominio  $= R^+$ , coefficiente  $k = 4$ . La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.



Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \text{ da cui}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}$$

Indicando con  $y$  la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta  $y = \sqrt{2} \cdot x$  con coefficiente  $k = \sqrt{2}$ , di dominio  $D = R^+$ .

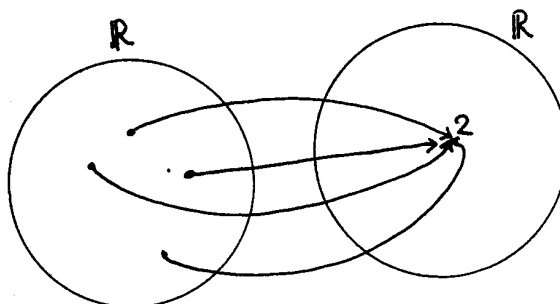
La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.

**258**  $x$  rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

**259** Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2metri?

### La funzione costante

Il seguente grafo rappresenta una funzione in cui **Dominio** =  $\mathbb{R}$  e l'insieme **IM**magine =  $\{2\}$ :

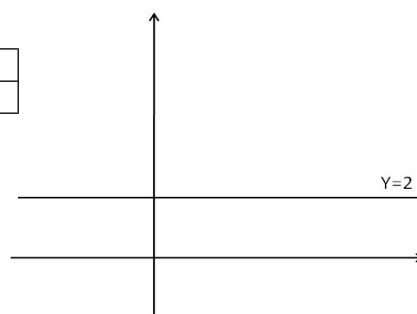


**DEFINIZIONE.** Si chiama **funzione costante** la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli:  $\forall x \in \mathbb{R} \text{ è } y = k \text{ con } k \in \mathbb{R}$ .

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale:

formula:  $y = 2$

x	-2	0	-3	1	2	...
y	2	2	2	2	...	...



**Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse x).**

Osserviamo che se  $k$  è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I° e II° quadrante); se  $k$  è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III° e IV° quadrante); se  $k = 0$  allora la retta coincide con l'asse  $x$  delle ascisse.

**260** Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni:

$y = -2; \quad y = 6; \quad y = 0; \quad y = -1 \quad y = +3$

**261** Traccia nel riferimento cartesiano la funzione  $y = 1$  e  $y = -3$ ; nello stesso riferimento traccia la funzione  $y = 2x$ . Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

**262** Le due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione  $y = -2$  un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio.

$f_1:$	x	-2	0	+3	-1
	y	2	0	-3	1
$f_2:$	x	1	0	+3	-2
	y	4	0	12	-8

**263** Traccia il grafico cartesiano delle funzioni  $f_1: y = 2x$   $f_2: y = -\frac{1}{2}x$   $f_3: y = 2$  e indica con A e B rispettivamente i punti di intersezione di  $f_1$  con  $f_3$  e di  $f_2$  con  $f_3$ . Considera il triangolo AOB (O è l'origine del riferimento). È vero che  $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$ ? Sai trarre una caratteristica del triangolo AOB? Traccia nello stesso riferimento la funzione  $f_4 = y - 4$  e indica con C e D rispettivamente i punti di intersezione di  $f_1$  con  $f_4$  e di  $f_2$  con  $f_4$ . Calcola l'area del quadrilatero ABCD.





### Significato dei coefficienti $m$ e $q$ nella funzione lineare $y = mx+q$

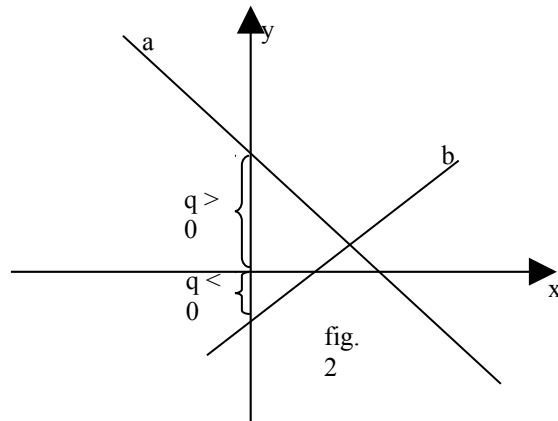
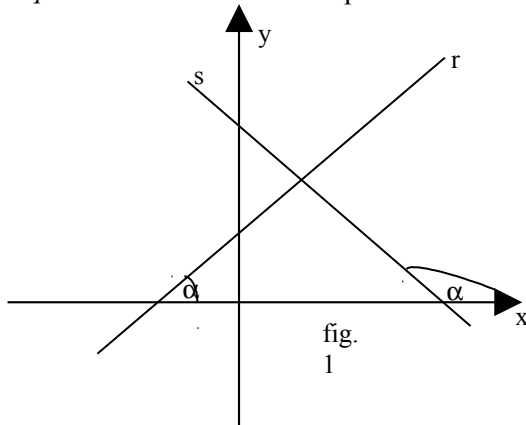
Se  $m=0$  la funzione è  $y=q$ , il suo grafico è una retta parallela all'asse  $x$ .

Se  $m \neq 0$  esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse.

Se  $m > 0$  l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se  $m < 0$  l'angolo è ottuso.

Se  $q=0$  la funzione è  $y=ax$ , il suo grafico è una retta passante per l'origine.

Se  $q \neq 0$  esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse  $y$ )



### Conclusione

**La funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.**

**266** Riferendoti ai grafici delle figure 1 e 2, completa:

- nella formula della funzione avente  $r$  come grafico si ha  $m \dots 0$  e  $q \dots 0$ ;
- nella formula della funzione avente  $s$  come grafico si ha  $m \dots 0$  e  $q \dots 0$ ;
- nella formula della funzione avente  $a$  come grafico si ha  $m \dots 0$  e  $q \dots 0$ ;
- nella formula della funzione avente  $b$  come grafico si ha  $m \dots 0$  e  $q \dots 0$ .

È possibile assegnata una tabella di corrispondenza determinare la formula della funzione lineare? Si può determinare; noi analizzeremo solo un caso particolare.

### Esempio

Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

$x$	-2	-1	0	1	$2/3$
$y$	-6	-3	0	3	2

$x$	-2	-1	0	1	$2/3$
$y$	-8	-5	-2	1	0

### Soluzione

Segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate  $(x; y)$  date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per

l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (d'altra parte il rapporto  $y/x$  non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di  $m$  (coefficiente angolare) e di  $q$ .

Dalla tabella so individuare il valore di  $q=-2$ , infatti per  $x=0$  si ha  $y=-2$ . Per determinare  $m$  sommo 2 a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta  $y=3x$ . Quindi la formula della funzione lineare cercata è  $y=3x-2$ .

Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di  $q$ .

**267** Le tabelle individuano coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico.

$F_1$	$x$	5	-1	0	3	1
	$y$	-2	4	-3	0	2
$F_2$	$x$	-4	$-4/3$	0	$-1/3$	$4/3$
	$y$	-2	0	1	$3/4$	2
$F_3$	$x$	-6	-1	0	3	1
	$y$	$-11/3$	$-1/3$	$1/3$	$7/3$	1

## La funzione di proporzionalità inversa

### Problema

La base e l'altezza di un rettangolo ABCD misurano rispettivamente 3cm e 4cm.  
Determina la sua area.

Soluzione: .....

Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato?

.....

Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati.

Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare **tutti** i rettangoli equivalenti a quello assegnato?

.....

Generalizziamo: I lati  $x$  e  $y$  di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione  $x \cdot y = 12$  con  $x \in \mathbb{R}^+$  e  $y \in \mathbb{R}^+$

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di  $x$  il lato  $y$  vale  $y = \frac{12}{x}$  come nella tabella

Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché .....

Ti sembrano allineati? .....

**DEFINIZIONE.** Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il prodotto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità inversa**. In simboli:  
 $y$  inversamente proporzionale a  $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$  con  $k \in \mathbb{R}_0$  e  $x \neq 0$  o anche  $y = \frac{k}{x}$

### Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamate iperbole.

Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante  $k$ .

**Caso  $k > 0$ :** quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili  $x$  e  $y$  sono senz'altro concordi; al numero positivo  $x$  corrisponde il numero positivo  $y = \frac{k}{x}$  dunque i punti nel riferimento

cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo  $x$  corrisponde il numero negativo  $y = \frac{k}{x}$  dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

### Esempio

rappresentare graficamente la funzione  $y = \frac{2}{x}$ .

Per far questo assegniamo a  $x$  alcuni valori, positivi e negativi:

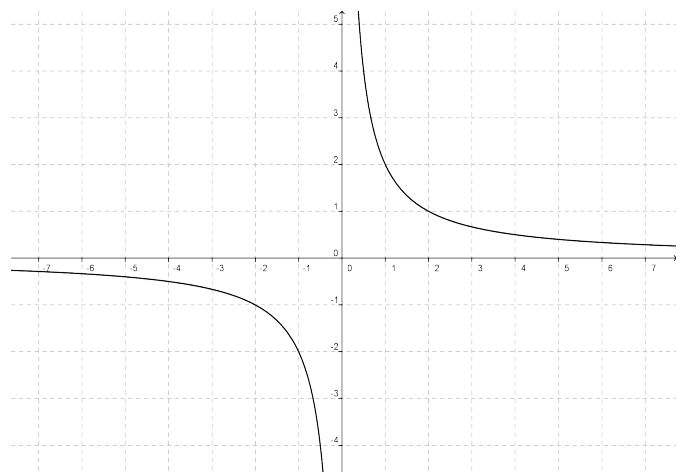
x	-3	-1	-1/2	1	4	1/2	3
y	-2/3	-2	-4	2	1/2	4	2/3

e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di  $x$  potrà avere come immagine

$y=0$  in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2).

Il dominio è  $D = \mathbb{R}_0$  e l'insieme immagine è  $IM = \mathbb{R}_0$ .

**Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati.** Questa curva è una **iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel I° e III° quadrante.



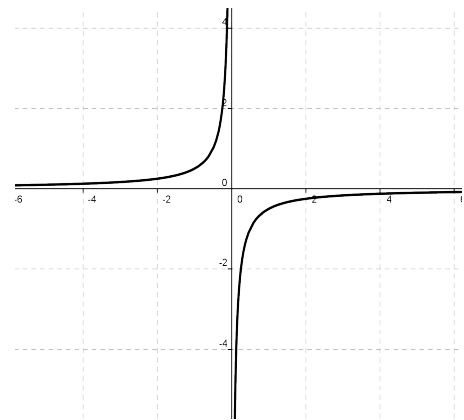
**Caso  $k < 0$ :** quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili  $x$  e  $y$  sono senz'altro discordi; al numero positivo  $x$  corrisponde il numero negativo  $y = \frac{k}{x}$  dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo  $x$  corrisponde il numero positivo  $y = \frac{k}{x}$  dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

**Esempio**

Rappresentare graficamente la funzione  $y = -\frac{1}{2x}$ .

Per far questo assegniamo a  $x$  alcuni valori, positivi e negativi:

x	-2	-1	-1/2	1	2	1/2	3/2
y	+1/4	1/2	1	-1/2	-1/4	-1	-1/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di  $x$  potrà avere come immagine  $y=0$  in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, in questo caso  $-\frac{1}{2}$ . Il dominio è  $D = \mathbb{R}_0$ ,

l'insieme immagine è  $IM = \mathbb{R}_0$ .

**Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati.** Questa curva è una **iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel II° e IV° quadrante.

**268** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

- a)  $f_1 = -\frac{3}{2x}$
- b)  $f_2 = \frac{1}{x}$
- c)  $f_3 = \frac{5}{x}$
- d)  $f_4 = \frac{-3}{x}$
- e)  $f_5 = -\frac{1}{x}$
- f)  $f_6 = -\frac{2}{5x}$

**269** Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva  $\gamma$   $y = -\frac{1}{2x}$  e le rette

$r_1: y=2$  e  $r_2: y=-2$ . Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti  $A_1 = r_1 \cap \gamma$  e  $A_2 = r_2 \cap \gamma$ .

**La funzione di proporzionalità quadratica**

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costante, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa oppure una funzione lineare:

x	-2	-1	1/2	0	2	3	3/2
y	4	1	1/4	0	4	9	9/4

Costruisci le proposizioni del tipo:

“La tabella rappresenta/non rappresenta una funzione di .....”

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, quella tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato.

Il dominio di tale funzione è  $D = \mathbb{R}$ , mentre l'Immagine è

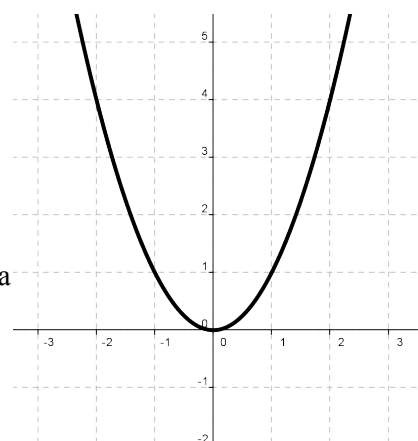
$IM = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Possiamo osservare che è costante il rapporto tra il valore della variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente quando è diversa da

zero; essendo  $\frac{y}{x^2} = 1$  con  $x \neq 0$  la formula in cui si esprime il legame

algebrico delle due variabili è, in questo caso,  $y = x^2$ .

Costruiamo il suo grafico, utilizzando i punti della tabella:



**DEFINIZIONE.** Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità quadratica**.

In simboli:  $y$  proporzionale a  $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  e  $k \neq 0$  o anche  $y = k \cdot x^2$

**Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata parabola. Il punto  $O(0;0)$  si chiama vertice della parabola.**

**270** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

- a)  $f_1 = -x^2$                       b)  $f_2 = x^2$                       c)  $f_3 = -\frac{1}{2}x^2$   
 d)  $f_4 = -\frac{5}{2}x^2$                       e)  $f_5 = \frac{3}{4}x^2$                       f)  $f_6 = \frac{7}{3}x^2$

**271** Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando:

- se  $k > 0$  allora i punti della parabola si trovano.....
- se  $k < 0$  allora i punti della parabola si trovano .....
- se  $k > 1$  allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla  $y = x^2$  ? .....
- se  $0 < k < 1$  allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla  $y = x^2$  ? .....
- se  $k < -1$  allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla  $y = -x^2$  ? .....
- se  $-1 < k < 0$  allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla  $y = -x^2$  ? .....

**272** Determina la distanza del punto di ascissa  $x = -2$  della parabola  $y = 3x^2$  dal suo vertice.

**273** Sono assegnate le funzioni  $f_1: y = (-x)^2$  e  $f_2: y = -x^2$  di proporzionalità quadratica.

- h) Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione.
- i) Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune.
- j) Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico.
- k) Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

**274** Completa la seguente tabella:

funzione	in linguaggio comune	formula	tipo
F <sub>1</sub>	Associa ad ogni x reale il valore $-2/3$		
F <sub>2</sub>	Associa ad ogni x reale il triplo del suo quadrato		
F <sub>3</sub>		$y = -5x^2$	
F <sub>4</sub>	Associa ad ogni x reale il suo doppio aumentato di $3/2$		
F <sub>5</sub>	Associa ad ogni x reale diverso da zero l'opposto del suo reciproco		
F <sub>6</sub>		$y = -5x$	

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate. Per quale/i è vero che per qualunque x del dominio è  $IM = \mathbb{R}$  ?

**275** Il rettangolo ABCD ha il lato AB triplo del lato BC. Indica  $\overline{BC} = x$  ; determina il perimetro del rettangolo in funzione di x.  $2p = \dots\dots\dots$

Spiega perché è necessaria la condizione  $x > 0$  ; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro. Determina ora l'area in funzione di x,  $area = \dots\dots\dots$  ; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

**276** Il triangolo rettangolo ABC, retto in A ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore  $\overline{AB} = x$  e spiega perché è necessaria la condizione  $x > 0$  . Determina in funzione di x l'area del triangolo.  $area = \dots\dots\dots$  rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale.

Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di  $20\text{cm}^2$ .

Calcola in funzione di x il perimetro del triangolo:  $2p = \dots\dots\dots$  , rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di x.

**277** Nel triangolo isoscele ABC il lato obliquo AB è doppio della base BC; indica  $\overline{BC} = x$  e determina in funzione di x il perimetro del triangolo.  $2p = \dots\dots\dots$

Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.

Se il perimetro è  $120\text{cm}$ , quanto misurano i lati del triangolo?

Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

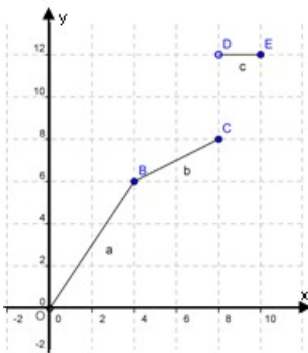
## Funzione lineare a tratti

### Problema

La ditta “Farvit” produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10Kg.; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

peso $\leq$ 4Kg	Costo = $1,5 \cdot$ peso
$4 \text{ Kg} <$ peso $\leq$ 8Kg	Costo = $0,5 \cdot$ peso + 4euro
$8\text{Kg} <$ peso $\leq$ 10Kg	Costo = 12 euro

Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico.



Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8Kg.; il punto D è l'estremo di un segmento aperto a sinistra.

Per un peso di 8,1Kg il costo è di 10 euro.

Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.

Rispondete:

Qual è il costo di una confezione di 3Kg? costo = .....

Segnate il punto corrispondente sul grafico.

Il punto E cosa rappresenta? .....

Stabilite il Dominio e il codominio della funzione Costo.

**DEFINIZIONE.** Diciamo che una funzione è **definita per casi** quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

### Esempio

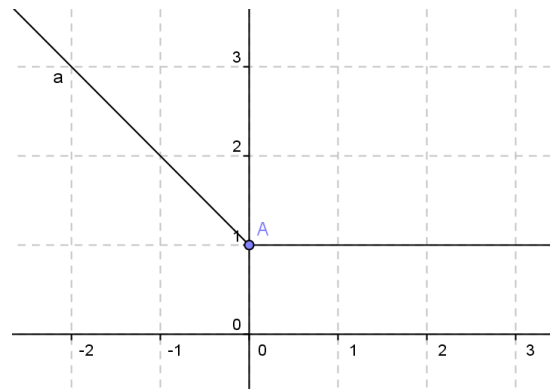
È assegnata la funzione  $f(x) = \begin{cases} f_1: y=1-x & \text{con } x \leq 0 \\ f_2: y=1 & \text{con } x > 0 \end{cases}$ ; tracciate il suo grafico.

1° passo: individuiamo il dominio che risulta dall'unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}$$

2° passo:  $f_1$  è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: A(0,1) e B(-1,2);  $f_2$  è una funzione costante.

3° passo: tracciamo il grafico che risulta formato dall'unione di due semirette aventi la stessa origine A(0,1)



**278** Dopo aver determinato il Dominio, tracciare il grafico della funzione  $f(x) = \begin{cases} y=1 & \text{se } x \geq 0 \\ y=0 & \text{se } x=0 \\ y=-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$  e

calcolare l'ordinata dei suoi punti A e B sapendo che  $x_A=34$  e  $x_B=-5$ .

### Osservazione

Il grafico dell'esempio e quello dell'esercizio hanno una notevole differenza:

le due semirette dell'esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette dell'esercizio precedente hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è **continua** nel dominio, nel secondo caso che è **discontinua**.

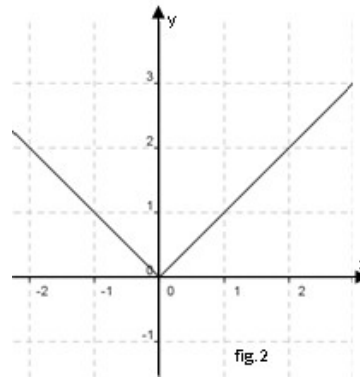
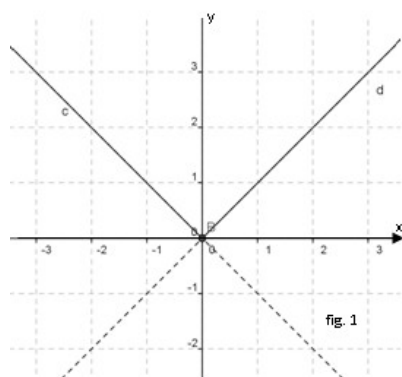
**279** Tracciare il grafico della funzione  $f(x) = \begin{cases} y=-1 & \text{se } x > 1 \\ y=2x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

### Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} y = x & \text{se } x \geq 0 \\ y = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta  $y = x$  e su di essa evidenziamo la semiretta  $d$  avente l'origine in  $O$  i cui punti appartengono al primo quadrante; analogamente tracciamo la retta  $y = -x$  e su di essa evidenziamo la semiretta  $c$  avente l'origine in  $O$  i cui punti appartengono al secondo quadrante. Nelle figure sono rappresentati i passi descritti (fig.1) e quindi il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate (fig.2).



### Conclusione

Il grafico della funzione valore assoluto di equazione  $y = |x|$  è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano, la funzione è continua, è nulla per  $x = 0$  e positiva per ogni  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , il codominio è  $C = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ .

**280** Tracciare il grafico della funzione  $y = |x + 1|$ .

**281** Un caseificio vende mozzarelle a € 4,50 al chilo ai clienti che acquistano fino a 10kg di mozzarella, per i clienti che fanno acquisti superiori ai 10kg vende a € 4,00 al kg per la parte che eccede i 10kg e per i primi 10kg vende sempre a € 4,50. Per i clienti dei grandi supermercati che acquistano quantità superiori a 100kg vende a € 3,50 al kg. Codifica con opportune formule la funzione costo:

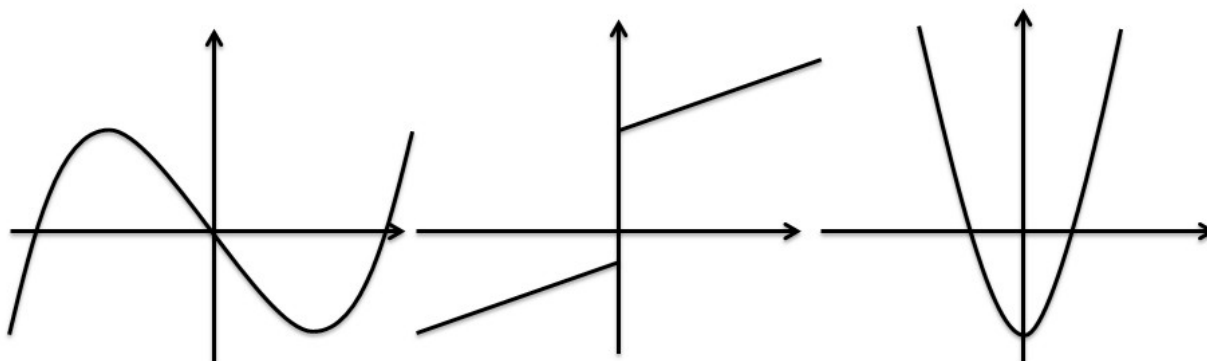
$$\begin{cases} \dots\dots & \text{se } x \leq 10 \\ \dots\dots & \text{se } 10 < x < 100 \\ \dots\dots & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

Determina il costo dei seguenti ordini

kg	3,5	11,8	78	120			
€					360	57	35

Rappresenta graficamente la funzione.

**282** Dal grafico della funzione stabilisci insieme di definizione  $D$ , immagine  $IM$ , verifica se la funzione è iniettiva, suriettiva o biettiva.



$D = \dots\dots\dots$

$IM = \dots\dots\dots$

Iniettiva – Suriettiva – Biettiva

$D = \dots\dots\dots$

$IM = \dots\dots\dots$

Iniettiva – Suriettiva – Biettiva

$D = \dots\dots\dots$

$IM = \dots\dots\dots$

Iniettiva – Suriettiva – Biettiva

## ► 16. Particolari relazioni d'equivalenza

### La costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

“Dio fece i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo.”  
Leopold Kronecker (Liegnitz 1823, Berlino 1891)

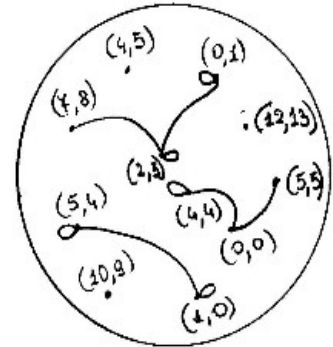
#### Esempio

Preso l'insieme  $A = \{(4,5), (7,8), (0,1), (2,3), (5,4), (12,13), (10,9), (5,5), (1,0), (4,4), (0,0)\}$ , sottoinsieme del prodotto cartesiano  $N \times N$ , considera in  $A$  la relazione  $R$  così definita:

“(m,n)  $R$  (p,q) se e solo se la somma di m con q è uguale alla somma di n con p”

in linguaggio matematico: (m,n)  $R$  (p,q) se e solo se  $m+q = n+p$

- Completa il suo grafo e deduci le proprietà:
- Costruisci e rappresenta con diagrammi di Eulero-Venn la partizione  $P(A)$  dell'insieme  $A$  e l'insieme quoziente  $A/R$ .
- Quante classi d'equivalenza hai ottenuto?
- È vero che ciascuna di esse può essere rappresentata da una coppia avente almeno un elemento nullo?
- Scrivi i rappresentanti delle classi d'equivalenza.



Proviamo ora a generalizzare quanto ottenuto.

Nel prodotto cartesiano  $N \times N$  consideriamo la relazione  $R$  definita nell'attività precedente; essendo  $N \times N$  formato da infiniti elementi non possiamo rappresentare il grafo della relazione, ma possiamo comunque studiarne le proprietà per stabilire se anche in questo insieme si mantengono le conclusioni raggiunte nell'esercizio.

- La relazione è riflessiva: per qualunque coppia (m,n) di  $N \times N$  si ha (m,n)  $R$  (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza  $m+n = n+m$ , vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché l'addizione in  $N$  gode della proprietà commutativa.

Con riferimento all'attività precedente hai potuto infatti mettere il cappio sopra ogni coppia: ad esempio è vero che  $(4,5) R (4,5)$  poiché  $4+5 = 5+4$ .

- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) appartenenti a  $N \times N$ , se (m,n)  $R$  (p,q) allora (p,q)  $R$  (m,n).

Infatti se (m,n)  $R$  (p,q) si ha  $m+q = n+p$ ; per la proprietà commutativa dell'addizione in  $N$  si ha anche  $p+n = q+m$ , uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).

Nell'esercizio precedente, ad esempio, la coppia (5,4) è in relazione con la coppia (10,9) perché è vero che  $5+9 = 4+10$ ; da questa è anche vero che  $10+4 = 9+5$ , uguaglianza che assicura  $(10,9) R (5,4)$ : nel grafo hai usato archi per evidenziare coppie in relazione.

- La relazione è transitiva: se (m,n)  $R$  (p,q) e (p,q)  $R$  (s,t) allora (m,n)  $R$  (s,t), per qualunque terna di coppie (m,n), (p,q), (s,t) appartenenti a  $N \times N$ .

Infatti se (m,n)  $R$  (p,q) e (p,q)  $R$  (s,t) si ha  $m+q = n+p$  e  $p+t = q+s$ ; sommando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene  $m+q + p+t = n+p + q+s$  che può anche essere scritta

$(m+t)+(q+p) = (n+s)+(q+p)$  per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in  $N$ . Confrontando i membri dell'uguaglianza si deduce che  $m+t = n+s$ , e quest'ultima assicura la verità dell'affermazione (m,n)  $R$  (s,t).

Riferendoti all'esercizio svolto sopra hai

potuto stabilire che  $(5,4) R (10,9)$  e

$(10,9) R (1,0)$  poiché  $5+9=4+10$  e

$10+0=9+1$ ; procediamo come nel

ragionamento precedente e sommiamo

membro a membro le due uguaglianze;

otteniamo  $5+9+10+0 = 4+10+9+1$ ,

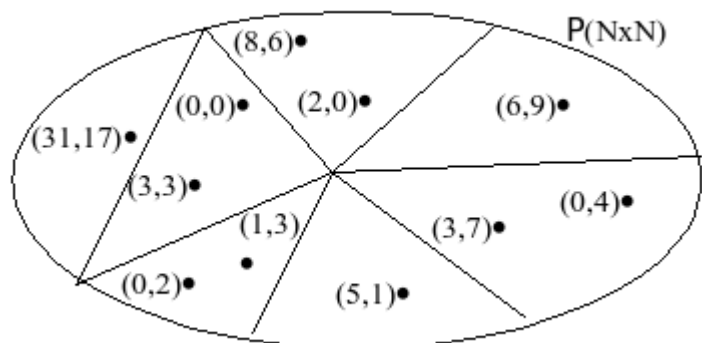
uguaglianza che si può anche scrivere

$(5+0)+(9+10) = (4+1)+(10+9)$ , da cui

$5+0=4+1$  che assicura la verità di

$(5,4) R (1,0)$ : nel grafo della relazione

compaiono triangoli aventi come vertici coppie in relazione.





**Conclusione 1**

**La relazione R così introdotta nell'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme  $N \times N$ .**

Analizzando con attenzione  $P(N \times N)$ , possiamo determinare quale coppia ci conviene assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.

Si può osservare che

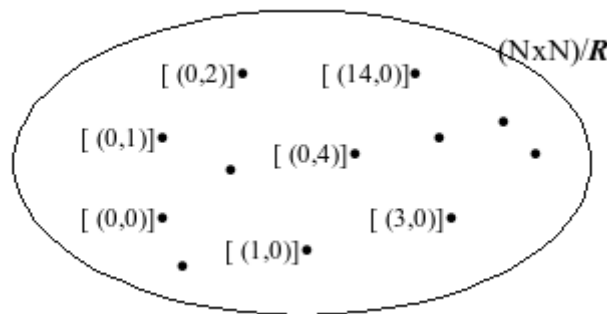
- coppie formate da elementi uguali appartengono alla stessa classe d'equivalenza che può quindi essere rappresentata dalla coppia (0,0);
- la coppia (m,n) con  $m > n$  è equivalente alla coppia (m-n,0) essendo  $m+0 = n+m-n$ ; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) può essere rappresentata dalla coppia (m-n,0);
- la coppia (m,n) con  $m < n$  è equivalente alla coppia (0, n-m) essendo  $m+n-m = n+0$ ; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) è rappresentata dalla coppia (0,n-m).

**283** Determina la coppia avente un elemento nullo, equivalente a  
 (31,17) ... .. (6,9) ... .. (5,1) ... ..

**Conclusione 2**

**Ciascuna classe d'equivalenza può essere rappresentata da una coppia di numeri naturali avente almeno un elemento nullo.**

L'insieme quoziente  $(N \times N)/R$  è pertanto:



**DEFINIZIONI**  
 Si chiama **numero intero relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in  $N \times N$  la relazione  $(m,n) R (p,q)$  se e solo se  $m+q = n+p$ .  
 Si chiama **forma canonica del numero intero relativo** la coppia scelta come rappresentante della classe d'equivalenza.

Possiamo ad esempio dire che la classe  $[(3,7)]$  è un numero intero relativo di forma canonica (0,4).

**284** Completa la tabella:

numero intero relativo	elementi della classe d'equivalenza	forma canonica del numero intero
$[(5,7)]$	(7,5) (11,9) (34,32) (3,1) .....	
		(7,0)
$[(56,90)]$	(3,3) (76,76) (9,9) (43,43) .....	
		(0,4)
	(4,9) (8,13) (57,62) .....	

**DEFINIZIONI**

Si chiama **numero intero positivo** la classe d'equivalenza  $[(n,0)]$  e si indica con il simbolo  $+n$ .

Si chiama **numero intero negativo** la classe d'equivalenza  $[(0,n)]$  e si indica con il simbolo  $-n$

Si chiama **zero** la classe d'equivalenza  $[(0,0)]$  e si indica con  $0$

Si chiama **valore assoluto del numero intero relativo** il numero naturale diverso da zero che compare nella sua forma canonica.

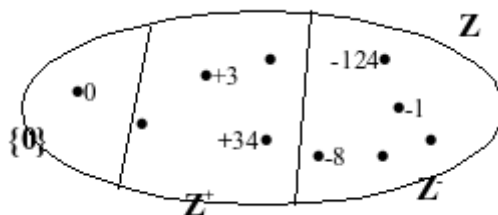
**285** Completa la tabella:

numero intero	forma canonica	simbolo usuale	valore assoluto
		+ 6	
	(0,2)		
[ (5,5) ]			
		- 1	

**DEFINIZIONE.** L'insieme  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$  è chiamato **insieme dei numeri interi relativi** e indicato con il simbolo  $\mathbb{Z}$ .

**Osservazioni**

- L'insieme dei numeri interi relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri interi.
- Esso contiene tre sottoinsiemi  $Z^+ = \{x / x \text{ è intero positivo}\}$ ,  $Z^- = \{x / x \text{ è intero negativo}\}$ , e l'insieme il cui unico elemento è lo zero  $\{0\}$ . Scriviamo quindi  $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$  e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo  $Z_0$  col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero:

$$Z_0 = Z^+ \cup Z^- = Z - \{0\}$$

**La costruzione dell'insieme dei numeri razionali**

Indichiamo con  $\mathbb{N}_0$  l'insieme dei naturali privato dello zero, precisamente  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} - \{0\}$  e costruiamo l'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ ; esso sarà costituito da tutte le coppie ordinate di numeri naturali di cui il secondo elemento è diverso da zero, cioè  $(0,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  mentre  $(5,0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ .

In questo insieme sia  $R$  la relazione così definita

$$(m,n)R(p,q) \text{ se e solo se } m \cdot q = n \cdot p$$

**Esempio**

Segna se Vero o Falso e dai la motivazione di quanto affermi:

coppie	V	F	motivazione
(3,5) R (15,25)			
(3,9) R (1,3)			
(8,9) R (7,8)			
(0,6) R (0,1)			

Analizziamo le proprietà della relazione:

- La relazione è riflessiva: per qualunque  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  si ha  $(m,n) R (m,n)$ .

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza  $m \cdot n = n \cdot m$ , vera qualunque siano i numeri naturali  $m$  ed  $n$  poiché la moltiplicazione in  $\mathbb{N}$  gode della proprietà commutativa.

- La relazione è simmetrica: per qualunque  $(m,n)$  e  $(p,q)$  dell'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  se  $(m,n)R(p,q)$  allora  $(p,q)R(m,n)$ .

Infatti se  $(m,n)R(p,q)$  si ha  $m \cdot q = n \cdot p$ ; per la proprietà commutativa della moltiplicazione in  $\mathbb{N}$  si ha anche  $p \cdot n = q \cdot m$ , uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia  $(p,q)$  e  $(m,n)$ .

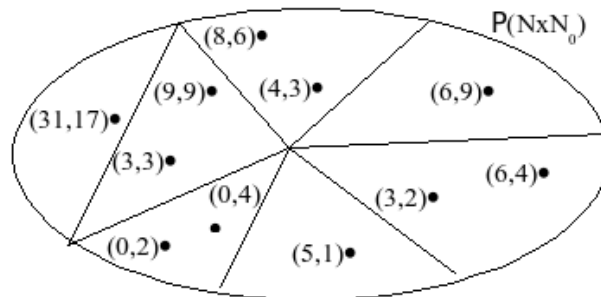
- La relazione è transitiva: se  $(m,n)R(p,q)$  e  $(p,q)R(s,t)$  allora  $(m,n)R(s,t)$ , per qualunque terna di

coppie  $(m,n)$ ,  $(p,q)$ ,  $(s,t)$  appartenenti a  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ .

Infatti, se  $(m,n)R(p,q)$  e  $(p,q)R(s,t)$  sappiamo che  $m \cdot q = n \cdot p$  e che  $p \cdot t = q \cdot s$ ; ora moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene  $m \cdot q \cdot p \cdot t = n \cdot p \cdot q \cdot s$  che può anche essere scritta  $(m \cdot t) \cdot (q \cdot p) = (n \cdot s) \cdot (q \cdot p)$  per le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in  $\mathbb{N}$ . Confrontando i membri dell'uguaglianza e dividendo per i fattori uguali si deduce che  $m \cdot t = n \cdot s$ , che assicura la verità dell'affermazione  $(m,n)R(s,t)$ .

**Conclusione 3**

**Si può concludere che la relazione  $R$  introdotta nell'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ .**



Vogliamo determinare la coppia da assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.

Per fare questo associamo a ciascuna coppia  $(a,b)$  di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  la frazione  $\frac{a}{b}$  e osserviamo che la relazione  $R$  in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  prende significato se trasferita nell'insieme delle frazioni dalla operazione che permette di costruire frazioni equivalenti.

Esempio

Preso la coppia  $(4,3)$  ad essa associamo la frazione  $\frac{4}{3}$ ; alla coppia  $(8,6)$  associamo la frazione  $\frac{8}{6}$ . Le coppie  $(4,3)$  e  $(8,6)$  stanno nella stessa classe d'equivalenza poiché  $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$ ; le frazioni  $\frac{4}{3}$  e  $\frac{8}{6}$  sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

**286** Completa il ragionamento:

Alla coppia  $(6,4)$  viene associata la frazione .....; alla coppia  $(\dots, \dots)$  è associata la frazione  $\frac{3}{2}$ .

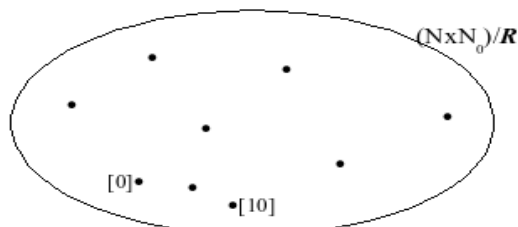
Le coppie ..... stanno nella .....; le frazioni ..... sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

**287** Ripeti l'esercizio prendendo coppie di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  in relazione e mostrando la relazione di equivalenza tra le rispettive frazioni.

**Conclusione 4**

**Tutte le coppie appartenenti ad una classe d'equivalenza risultano associate ad una stessa frazione; scegliamo dunque come rappresentante di ciascuna classe la frazione ridotta ai minimi termini.**

L'insieme quoziente  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 / R$  è pertanto:



**DEFINIZIONI**

Si chiama **insieme dei numeri razionali assoluti** l'insieme quoziente  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 / R$ ; si indica con il simbolo  $Q_A$ .

Si chiama **numero razionale assoluto** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$  la relazione  $R: (m,n) R (p,q)$  se e solo se  $m \cdot q = n \cdot p$ ; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini.

Quanto abbiamo detto ci permette di passare dall'insieme delle frazioni ad un insieme di numeri che, benché scritti con il simbolo  $m/n$ , lo stesso usato per rappresentare una parte di una grandezza, hanno un significato completamente diverso dalla frazione. D'altra parte, hai già visto nella secondaria di primo grado che al simbolo  $m/n$  si può attribuire il significato di quoziente della divisione tra il numeratore e il denominatore e che i numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione.

**288** Completa la tabella:

coppie	appartengono alla stessa classe d'equivalenza?	rappresentante della classe	rappresentano lo stesso numero razionale?	simbolo del numero razionale
(1,2); (3,6)	SI	$[\frac{1}{2}]$	SI	$\frac{1}{2}$
(2,7); (4,49)				
(8,5); (40,25)				
(60,12); (5,0)				
(20,2); (10,1)				

**289** Completa la catena di trasformazioni:

coppie	numero razionale come frazione	rappresentazione decimale
(1,2) $R$ (3,6)	$\frac{1}{2}$	0.5
(2,7) $R$ (4,14)		
(8,5) $R$ (40,25)		
(60,12) $R$ (10,2)		
(2,3) $R$ (12,18)		

**Conclusione 5**

Se introduciamo la stessa relazione  $R$  nell'insieme  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ , possiamo ottenere le seguenti definizioni:

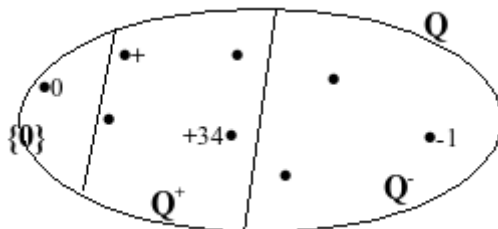
**DEFINIZIONI**

Si chiama **insieme dei numeri razionali relativi** l'insieme quoziente  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0) / R$ ; esso si indica con il simbolo  $Q$ .

Si chiama **numero razionale relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$  la relazione  $R: (m,n) R (p,q)$  se e solo se  $m \cdot q = n \cdot p$ ; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini dotata di segno.

**Osservazioni**

- L'insieme dei numeri razionali relativi viene più semplicemente chiamato insieme dei numeri razionali.
- Esso contiene tre sottoinsiemi particolari  $Q^+ = \{x \mid x \text{ è razionale positivo}\}$ ,  $Q^- = \{x \mid x \text{ è razionale negativo}\}$ , e l'insieme il cui unico elemento è lo zero  $\{0\}$ . Scriviamo quindi  $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$  e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si devono considerare solamente i razionali positivi e negativi, zero escluso, si usa il simbolo  $Q_0$  col quale si indica appunto l'insieme dei numeri razionali relativi privato dello zero:

$$Q_0 = Q^+ \cup Q^- = Q - \{0\}$$

**Classi di resti modulo n**

**290** Considera la relazione  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione per 3" introdotta nell'insieme

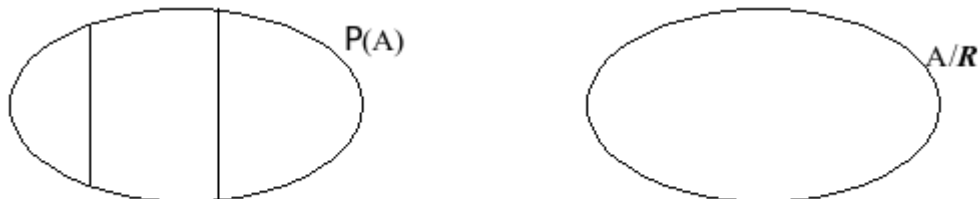
$A = \{n \in \mathbb{N} / 0 \leq n \leq 13\}$  e studiane le proprietà.

Ricordiamo che il resto della divisione si calcola con l'operazione *mod*; completiamo dunque la tabella sottostante:

	0 mod 3	1 mod 3	2 mod 3				6 mod 3	7 mod 3				11 mod 3		13 mod 3
resto	0						0					2		

La relazione  $R$  è d'equivalenza; infatti .....

Completa l'insieme  $P(A)$  partizione dell'insieme  $A$  e l'insieme quoziente  $A/R$



Quali sono i rappresentanti delle classi d'equivalenza?  
 Sarebbe cambiato qualcosa se avessimo introdotto la stessa relazione nell'insieme  $\mathbb{N}$ ?  
 E se sostituissimo  $\mathbb{N}$  con  $\mathbb{Z}$  cosa cambierebbe?

**291** Nell'insieme  $\mathbb{N}$  considera la relazione d'equivalenza  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione per 2".

Quante classi d'equivalenza puoi formare? Rappresenta l'insieme  $P(\mathbb{N})$ . Quali sono i rappresentanti di ciascuna classe? Riconosci in queste classi, particolari sottoinsiemi dell'insieme  $\mathbb{N}$ ?

Generalizziamo ora l'esercizio.

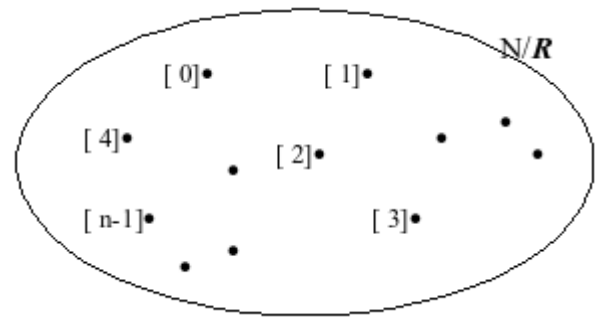
Fissato un numero naturale  $n > 1$ , considera la relazione  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione intera per  $n$ " introdotta nell'insieme  $\mathbb{N}$ , studiane le proprietà e stabilisci se è d'equivalenza.

Osserviamo innanzitutto che nella divisione intera per  $n$  il resto si ottiene con l'operazione *mod* e si ha come resto  $0, 1, 2, \dots, n-1$  cioè  $n$  resti;

- La relazione è riflessiva, infatti per qualunque  $m \in \mathbb{N}$  si ha  $mRm$ .
- La relazione è simmetrica, infatti per qualunque  $p$  e  $q$  dell'insieme  $\mathbb{N}$  se  $pRq$  allora  $qRp$ .  
 Precisamente, se  $pRq$  significa che  $p \bmod n = q \bmod n$  e per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere  $q \bmod n = p \bmod n$ , uguaglianza che assicura la validità della relazione tra  $q$  e  $p$ .
- La relazione è transitiva: se  $pRq$  e  $qRs$  allora  $pRs$ , per qualunque terna di naturali.  
 Infatti se  $pRq$  significa  $p \bmod n = q \bmod n$  e se  $qRs$  significa che  $q \bmod n = s \bmod n$ ; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha  $p \bmod n = s \bmod n$ , uguaglianza che assicura la validità della relazione tra  $p$  e  $s$ .

**Conclusione 6**

La relazione  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione intera per  $n$ ", introdotta nell'insieme dei numeri naturali, è una relazione d'equivalenza e permette quindi una partizione dell'insieme  $N$  in  $n$  classi d'equivalenza aventi come rappresentanti tutti e soli i possibili resti della divisione intera per  $n$ . L'insieme quoziente è formato da  $n$  elementi, viene rappresentato come in figura e viene chiamato **insieme delle classi di resti modulo  $n$** .



L'insieme quoziente  $N/R$  si indica anche col simbolo  $N_n$  dove l'indice  $n$  indica il numero rispetto al quale si è eseguita l'operazione *mod*.

**292** Determina gli elementi di  $N_7$ .

*Traccia di soluzione:*

Nell'insieme  $N$  si considera la relazione d'equivalenza  $R$ : "avere lo stesso resto nella divisione per 7"

Le classi d'equivalenza sono:  $[0], [1], \dots, [6]$ .

Nella classe  $[0]$  stanno tutti i  $\dots$  che divisi per 7 danno  $\dots$ , cioè  $\dots$

In quale classe sta il numero 427? E il numero 74?

**293** Nell'insieme  $Z_6$  delle classi di resto modulo 6 si può definire la somma e il prodotto ricalcandola dall'addizione e moltiplicazione dei numeri naturali. Si ha pertanto:

$[1] + [2] = [3]$

$[4] + [5] = [3]$  infatti  $4+5=9$  ma  $[9]=[3]$

Determina:  $[5] + [3] = [\dots]$

$[3] + [3] = [\dots]$

$[1]+[0] = [\dots]$

Analogamente si può definire la moltiplicazione:

$[5] \cdot [3] = [3]$  infatti  $5 \cdot 3 = 15$  ma  $15:6 = 2$  con il resto di 3, quindi  $\dots$

Determina:  $[5] \cdot [2] = [\dots]$

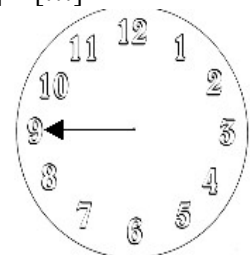
$[3] \cdot [1] = [\dots]$

$[3] \cdot [0] = [\dots]$

**294** Elenca e descrivi gli elementi dell'insieme  $Z_{12}$ .

Trovi qualche analogia con il disegno dell'orologio riprodotto accanto?

Come rispondi alla domanda: "5 ore dopo le 9 di mattina dove si trova la lancetta delle ore?" È sbagliato dire "4 ore dopo le 9 di mattina sono le 2"?



**295** Nel supermercato al banco della frutta la bilancia presenta una tastiera come quella in figura, premendo il bottone relativo alla frutta da pesare si ottiene l'adesivo con il prezzo.

Sistema, senza contare casella per casella, il numero che corrisponde ai miei acquisti di oggi:

zucchine al numero 75; arance al numero 63; spinaci al numero 48; patate al numero 56.

Hai potuto sfruttare le classi di resti modulo 8?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

## ► 17. Insiemi finiti e insiemi infiniti

### Cardinalità di un insieme

Il concetto di “corrispondenza biunivoca” permette di affrontare il problema del confronto tra insiemi. Stabiliamo subito una

**DEFINIZIONE.** Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

### Esempio

Sia S l'insieme dei giorni della settimana e H l'insieme delle note musicali:

Sistemando gli elementi dei due insiemi come visualizzato nella seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼
H	do	re	mi	fa	sol	la	si

ci rendiamo conto che tra di essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ottenuta semplicemente associando ad ogni giorno della settimana una e una sola nota musicale.

Possiamo procedere anche scrivendo i giorni della settimana ciascuno su un foglietto da inserire in un'urna  $A_1$  e facendo altrettanto con gli elementi dell'insieme H inseriti in un'urna  $A_2$ ; pescando alternativamente un foglietto da  $A_1$  e uno da  $A_2$ , ci accorgiamo che, esauriti i foglietti in  $A_1$  sono contemporaneamente esauriti quelli in  $A_2$ .

Concludiamo: **l'insieme S è equipotente all'insieme H.**

**296** Mostra che l'insieme M dei mesi dell'anno è equipotente all'insieme O dei segni zodiacali.

Consideriamo ora l'insieme  $\mathbf{N}_7 = \{x \in \mathbf{N} / 0 < x \leq 7\}$  la cui rappresentazione per elencazione è  $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ; come abbiamo fatto nell'esempio precedente, possiamo visualizzare la corrispondenza biunivoca che si stabilisce tra S, H e  $N_7$  per mezzo della seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼
H	do	re	mi	fa	sol	la	si
	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼
$N_7$	1	2	3	4	5	6	7

Si verifica facilmente che il predicato “essere equipotente” è una relazione d'equivalenza: la classe d'equivalenza di insiemi equipotenti è il numero naturale cardinale che ne indica la numerosità.

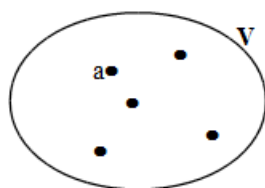
**DEFINIZIONE.** Si chiama **cardinalità** di un insieme A e si indica con  $cardA$  o  $\#A$  la classe d'equivalenza degli insiemi equipotenti ad A; essa indica il numero degli elementi di A. L'insieme vuoto ha cardinalità 0.

Gli insiemi H, S,  $N_7$  appartengono alla stessa classe d'equivalenza, la caratteristica comune è il numero di elementi:  $\#H = \#S = \#N_7 = 7$ .

**DEFINIZIONE.** Un **insieme** A si dice **finito** se esiste un n, naturale maggiore o uguale ad 1, tale che sussista una corrispondenza biunivoca tra A e  $N_n$ . In tal caso scriviamo  $cardA = n$ .

Gli insiemi H e S di cui sopra sono insiemi finiti; gli insiemi M e O dell'esercizio 1 hanno cardinalità 12 e sono insiemi finiti.

**297** Stabilisci la cardinalità dell'insieme V delle vocali della lingua italiana e dell'insieme D delle dita di una mano.



Completa l'insieme V. Stabilisci una corrispondenza ..... tra ..... e ..... Determina  $N_n$  .....  
 Concludo:  $\#V = \dots = \dots$

Prendiamo nuovamente in considerazione l'insieme  $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e un suo qualunque sottoinsieme

proprio, ad esempio  $N_3 = \{1,2,3\}$ ; risulta evidente che non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra  $N_7$  e  $N_3$ .

Questo fatto può essere preso come caratteristica di un insieme finito.

In generale possiamo affermare che l'insieme  $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leq n\}$  con  $n \geq 1$  non ha sottoinsiemi propri che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con esso: si dice che  $N_n$  è un insieme finito e un qualunque insieme A in corrispondenza biunivoca con  $N_n$  è finito e ha cardinalità n.

**Esistono insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio?**

Esempio

Consideriamo l'insieme N dei naturali e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari, che indichiamo con P. Costruiamo una tabella: qui non possiamo inserire tutti i numeri naturali, quindi metteremo puntini di sospensione per indicare che l'elenco prosegue:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	....

Abbiamo pertanto costruito una **corrispondenza tra l'insieme N (Dominio) e l'insieme P (Codominio) di tipo 1→1**: ad ogni numero naturale abbiamo associato il suo doppio (quindi un numero pari) che evidentemente è unico e viceversa ogni pari è l'immagine di un unico naturale. Inoltre il **Dominio e l'Insieme di Definizione coincidono** (ogni numero ha il doppio) e anche **Codominio e insieme Immagine coincidono** (ogni pari è immagine di un solo naturale). La corrispondenza è biunivoca, **N e P sono equipotenti** e la tabella va così modificata:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	....

Questo fatto paradossale non può verificarsi solo per gli insiemi finiti.

Riportiamo la seguente definizione che risale al matematico Richard Dedekind.

**DEFINIZIONE.** Un **insieme è infinito** se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

**298** Considera la corrispondenza **K** che ad ogni numero naturale associa un numero intero relativo secondo la seguente regola

- se  $n \in \mathbb{N}$  è pari allora il suo corrispondente è  $+\left(\frac{n}{2}\right)$
- se  $n \in \mathbb{N}$  è dispari allora il suo corrispondente è  $-\frac{(n+1)}{2}$

Completa:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

Qual è il numero naturale cui corrisponde il numero intero negativo -5 ? .....

Qual è l'immagine (il corrispondente) di 15 ? .....

Qual è l'insieme Immagine dell'insieme N ? .....

La legge definita genera una corrispondenza biunivoca tra N e Z ? .....

Quale conclusione puoi trarre ? .....

**299** Nel "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo", Galileo Galilei pone attraverso la domanda di Salviati e la risposta di Simplicio il problema dell'infinità dei naturali:

**Salviati** - [...] Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?



**Simplicio** - Non si può dire altrimenti.

Considera la corrispondenza **K** che ad ogni naturale associa il suo quadrato;

Completa:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
<b>K</b>	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$N^2$										

(abbiamo indicato con  $N^2$  l'insieme dei quadrati)

- Qual è l'immagine di 5? .....
- Di quale naturale è immagine 121? .....
- K** è una corrispondenza biunivoca tra **N** e  $N^2$  ? .....
- È vero che  $N^2$  è un sottoinsieme proprio di **N**? .....
- Quale conclusione puoi trarre ? .....

**DEFINIZIONE.** Un **insieme** X si dice **numerabile** quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra esso e l'insieme N dei naturali.

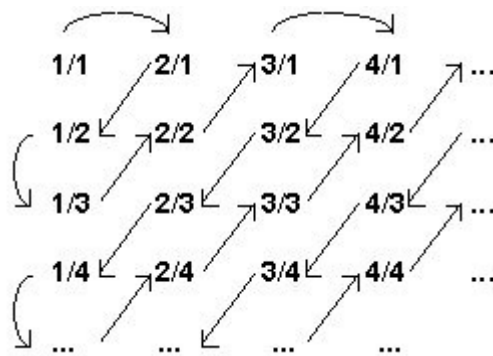
Dagli esempi precedenti e dagli esercizi svolti, possiamo concludere che l'insieme N, l'insieme P dei pari, l'insieme  $N^2$  dei quadrati, l'insieme Z degli interi, sono **insiemi numerabili**, hanno dunque tutti la stessa cardinalità.

Ma quale valore possiamo attribuire alla cardinalità degli insiemi sopra elencati se essi sono infiniti?

La **cardinalità** dell'insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo  $\aleph_0$  (si tratta della prima lettera dell'alfabeto ebraico con l'indice 0 e si legge **aleph con 0**).

Nel 1874, attraverso un procedimento detto "diagonalizzazione", Cantor dimostra che anche **l'insieme Q dei numeri razionali è numerabile**. Vediamo come possiamo ripercorrere la dimostrazione di questo fatto.

Ricordiamo che ogni numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione e che frazioni equivalenti sono lo stesso numero razionale. Costruiamo la seguente tabella delle frazioni, infinite righe e infinite colonne: nella prima colonna tutte le frazioni con numeratore 1, nella seconda quelle con numeratore 2 e così via. Attribuiamo ai suoi elementi l'ordinamento indicato dalle frecce; esso ci permette di costruire una corrispondenza biunivoca tra le frazioni positive e N; anzi considerando solamente quelle ridotte ai minimi termini, che rappresentano il numero razionale assoluto, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra  $Q_A$  e N nel modo seguente:



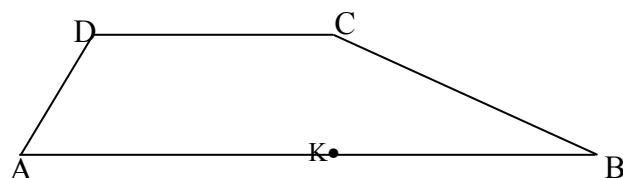
$Q_A$	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	....
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....

Cantor nel 1874 enunciò il seguente teorema.

**TEOREMA.** Non c'è corrispondenza biunivoca tra l'insieme R dei numeri reali e l'insieme N.

determinando un altro tipo di infinito la cui cardinalità denotò con il simbolo  $\aleph_1$ .  
 Noi tralasciamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato per la sua complessità e la incontrerete nel corso degli studi superiori; qui abbiamo voluto mostrarvi che vi sono diversi gradi di infinito e che di fronte ad insiemi "infiniti" non possiamo affermare che "la parte è minore del tutto".

A questo proposito vi proponiamo il seguente esercizio.



**300** Prolungate i lati obliqui del trapezio ABCD fino ad incontrarsi nel punto O.

Le semirette di origine O e comprese tra OA e OB, proiettano il segmento DC nel segmento AB, facendo corrispondere ad un punto di DC un punto di AB.

Direste Vera o Falsa l'affermazione: "I punti del segmento DC sono tanti quanti quelli del segmento AB" ?  
.....

Seguite questi passaggi rispondendo ai quesiti

1. Quale punto corrisponde a D, e quale a C? .....
2. Ogni punto di CD trova un corrispondente punto in AB? .....
3. Di quale punto è immagine il punto K di AB? .....
4. Ogni punto di AB è immagine di un solo punto di CD? .....
5. La proiezione costruita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra CD e AB ? .....
6. A quale conclusione vi ha condotto questo esercizio? .....

**301** Dati gli insiemi

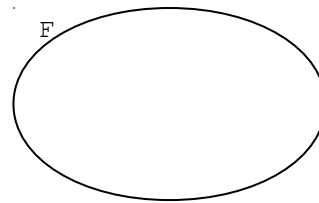
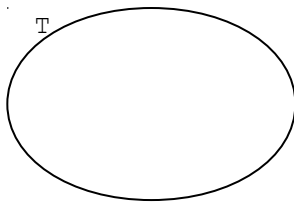
$A = \{x : x = 2n^2 - 1 \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq n < 2\}$ ;  $B = \{y \in \mathbb{Z} : -1 \leq y \leq 1\}$  è vero che si possono mettere in corrispondenza biunivoca?

**302** Dato l'insieme  $K = \{a, b, c, d\}$ , costruite l'insieme  $K \times K$ .

Considerate il suo sottoinsieme  $H = \{(x, y) : x \text{ precede } y \text{ nell'ordine alfabetico}\}$

È vero che tale insieme è equipotente all'insieme formato dalle facce di un cubo?

**303** Attraverso la costruzione di un grafo sagittale, attribuite il valore di verità alla proposizione: "Il sottoinsieme T di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  formato dalle coppie i cui elementi danno come somma 3 è equipotente all'insieme F dei divisori di 14."



**304** Attribuite il valore di verità alle seguenti proposizioni:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) un insieme infinito è numerabile   | V | F |
| b) un insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio | V | F |
| c) la cardinalità dell'insieme Q è maggiore di quella dell'insieme Z                                | V | F |
| d) due insiemi equipotenti sono infiniti  | V | F |

**305** Considerate l'insieme  $P^* = \{2^n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$  delle potenze di 2,

1. Completate la tabella sottostante:

n	0	1											
potenza													

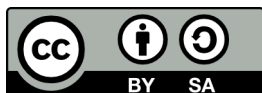
2. Quali proposizioni tra quelle assegnate sono vere?

- p1:  $P^*$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$   
 p2: 0 appartiene a  $P^*$   
 p3:  $P^*$  è numerabile  
 p4: Nessun elemento di  $P^*$  è maggiore di 2065438

[A] solo la p1                      [B] la p1 e la p3                      [C] la p1, la p2 e la p3                      [D] tutte e quattro

3. Quali considerazioni potete fare sull'infinità di  $P^*$ ?

### Copyright © Matematicamente.it 2011-2012



Questo libro, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della licenza **Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia** (CC BY-SA 3.0) il cui testo integrale è disponibile al sito

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/legalcode>

Tu sei libero:

di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera, di modificare quest'opera, alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

**Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

### Autori

Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi  
Claudio Carboncini: integrazioni, editing  
Antonio Bernardo: coordinamento, esercizi  
Germano Pettarin: esercizi  
Angela D'Amato: correzioni  
Nicola Chiriano: correzioni  
Francesco Daddi: correzioni  
Francesco Speciale: teoria, esercizi  
Nicoletta Passera: esercizi  
Laura Todisco: correzioni  
Mauro Paladini: integrazioni, esercizi  
Erasmus Modica: correzioni  
Giuseppe Pipino: osservazioni  
Maria Rosaria Agrello: osservazioni  
Vittorio Patriarca: osservazioni  
Luciano Sarra: correzioni  
Francesca Lorenzoni: correzioni  
Gemma Fiorito: correzioni  
Nicola De Rosa: soluzioni  
Lucia Rapella: correzioni, esercizi  
Francesco Camia: integrazioni

### Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a [antoniobernardo@matematicamente.it](mailto:antoniobernardo@matematicamente.it)

### Versione del documento

Versione 3.1 del 30.04.2012